KUMPULAN SOAL DAN PEMBAHASAN

OLIMPIADE MATEMATIKA SMA/MA

MA FUTUHIYAH JEKETRO

SAOL - JAWAB DAN PEMBAHASAN

OLIMPIADE MATEMATIKA SMA/MA

DISUSUN OLEH :

AHMAD THOHIR, S. Pd

MA FUTUHIYAH JEKETRO GUBUG

JL. RAYA No. 02 JEKETRO GUBUG GROBOGAN

2012

SINGKATAN

AIME	:	American Invitational Mathematics Examination
IMO	:	International Mathematical Olympiad
OMITS	:	Olimpiade Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
PUMaC	:	Princeton University Mathematics Competition

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah penulis ucapkan tak henti – hentinya kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena dengan pertolongannya penulis dapat menorehkan dan mencorat – coretkan tinta di atas kertas ini dan menuangkan beberapa tulisan matematika yang sederhana ini.

Penulis berpandangan, selama ini para siswa khususnya di madrasah kami masih banyak yang menemui kesulitan dengan soal – soal kompetisi maupun olimpiade matematika tingkat SMA/MA tak terkecuali bapak dan ibu guru juga termasuk penulis sendiri. Berangkat dari hal inilah penulis mengumpulkan beberapa contoh soal baik lokal maupun internasional untuk dapat digunakan bagi siswa – siswi dalam menghadapi even kompetisi matematika dan bapak atau ibu guru sebagai pendamping dalam pembinaan siswa – siswinya di sekolah atau madrsah masing – masing .

Penulis merasa dengan kehadiran ebook ini tentunya masik banyak sekali kekurangan yang ada di dalamnya. Untuk itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca yang budiman sebagai bahan untuk perbaikan diktat ini.

Jeketro, Desember 2012

AHMAD THOHIR, S. Pd

www.ahmadthohir1089.wordpress.com

A. ALJABAR (ALGEBRA)

1. Jika $= 201320132013\ X\ 2014201420142014$, dan $B = 2013201320132013\ X\ 201420142014$. Berapakah nilai dari $A - B$?

   Jawab :

   Sebenarnya untuk urusan perkalian bilangan bulat mungkin kebanyakan kita tidak banyak mengalami kesulitan tetapi jadi lain apabila sebuah bilangan disusun sedemikian rupa, misal seperti soal di atas apa lagi bentuknya sual uraian, mungkin kita akan berkata pada diri kita sendiri soal ini apa bila dikerjkan apa adanya jelas membutuhkan ketelitian dalam mengalikannya terus baru kemudian dikurangkan, kalau kita ingin pakai kalkulator jelas tidak mungkin pasti di layar akan muncul kata error.

   Adakah cara lain, eh ternyata ada coba anda perhatikan perkalian 2 bilangan berikut;

   1234 x 10001 = 12341234, terus untuk

   1234 x 100010001 = 123412341234.

   Dari perkalian 2 bilangan di atas anda pasti tahu bagai mana cara yang tepat dalam menyelesaikan soal di atas. ya, anda benar

   $A = 201320132013\ X\ 2014201420142014$ = 2013 x 100010001 x 2014 x 1000100010001, dan

   $B = 2013201320132013\ X\ 201420142014$ = 2013 x 1000100010001 x 2014 x 100010001.

   Sampai langkah di sini sudah terbayang dalam benak kita kalau jawabannya jelas A – B = 0.

2. Tentukan nilai dari

$$2013.(a-q).(b-q).(c-q).(d-q)\dots(z-q)$$

Jawab :
Perhatikan bahwa pada soal di atas terdapat perkalian dengan $(q-q)=0$, sehingg mengakibatkan

$$2013.(a-q).(b-q).(c-q).(d-q)\dots(q-q)\dots(z-q)=0$$

Jadi, $2013.(a-q).(b-q).(c-q).(d-q)\dots(z-q)=0$

3. Tentukan nilai dari

$$\left(9-\frac{1}{100}\right)^3.\left(9-\frac{2}{100}\right)^3.\left(9-\frac{3}{100}\right)^3\dots\left(9-\frac{2013}{100}\right)^3$$

Jawab :

Perkalian bilangan di atas terdapat bilangan $\left(9-\frac{900}{100}\right)^3=0^3=0$.

Jadi ,

$$\left(9-\frac{1}{100}\right)^3.\left(9-\frac{2}{100}\right)^3.\left(9-\frac{3}{100}\right)^3\dots\left(9-\frac{2013}{100}\right)^3=0$$

4. Tentukan nilai dari

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2013}\right)$$

Jawab :

Kita tahu bahwa $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, dan $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ demikian seterusnya

Sehingga

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2013}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}.\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}.\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\dots\frac{\cancel{2011}}{\cancel{2012}}.\frac{\cancel{2012}}{2013}=\frac{1}{2013}$$

Jadi,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2013}\right)=\frac{1}{2013}$$

5. Hitunglah $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{9900}$

Jawab :

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{9900}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}=0{,}99$

6. Tentukan jumlah dari

$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\frac{16}{16}+\frac{25}{32}+\cdots$

Jawab :

Misalkan

$S = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \cdots$

$\frac{1}{2}S = \quad \frac{1}{4} + \frac{4}{8} + \frac{9}{16} + \frac{16}{32} + \cdots$

______________________________ -

$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \cdots$

Selanjutnya

$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \cdots$ masing-masing ruas dikali $\frac{1}{2}$ lagi

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{7}{32} + \frac{9}{64} + \cdots$

______________________________ -

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32} + \cdots$

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots}_{Deret\ geometri\ dengan\ a=\frac{1}{2},\ r=\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$S = 6$

Jadi, $\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \cdots = 6$

7. Jika $2^x = 3^y = 6^z$, nyatakan z dalam x dan y

Jawab :

Perhatikan

$2^x = 3^y = 6^z$, sehingga dari persamaan ini kita mendapatkan

- $2^x = 3^y \Rightarrow 2 = 3^{\frac{y}{x}}$ atau $3 = 2^{\frac{x}{y}}$ ....1)
- $3^y = 6^z \Rightarrow 3^y = (2.3)^z \Rightarrow 3^y = 2^z.3^z$..................2)

Dari persamaan 1) dan 2) kita mendapatkan

$3^y = 2^z.3^z \Rightarrow 3^y = \left(3^{\frac{y}{x}}\right)^z.3^z$

$3^y = 3^{\frac{yz}{x}}.3^z \Rightarrow 3^y = 3^{\left(\frac{yz}{x}+z\right)}$

Sehingga

$y = \frac{yz}{x} + z \Longrightarrow y = \frac{yz+xz}{x} \Longrightarrow xy = z(x+y) \Longrightarrow = \frac{xy}{x+y}$, di sini $x, y \neq 0$

8. Diketahui $2^x + 2^{-x} = 3$, maka nilai dari $8^x + 8^{-x}$ adalah....

   Jawab :

   Diketahui $2^x + 2^{-x} = 3$.

   Perhatikan bahwa $8^x + 8^{-x} = (2^3)^x + (2^3)^{-x} = (2^x)^3 + (2^{-x})^3 = (2^x + 2^{-x})((2^x)^2 - 2^x.2^{-x} + (2^{-x})^2) = (3)((2^x)^2 + (2^{-x})^2 - 1) = (3)((2^x + 2^{-x})^2 - 2 - 1) = (3)(3^2 - 3) = (3)(6) = 18$

   Jadi, nilai dari $8^x + 8^{-x} = 18$

9. Bentuk sederhana dari $\frac{2^{2011}+2^{2012}+2^{2013}}{7}$?

   Jawab :

$$\frac{2^{2011} + 2^{2012} + 2^{2013}}{7} = \frac{2^{2011} + 2^{2011}.2^1 + 2^{2011}.2^2}{7} = \frac{2^{2011} + 2.2^{2011} + 4.2^{2011}}{7}$$

$$= \frac{(1+2+4).2^{2011}}{7} = 2^{2011}$$

10. Tentukan nilai dari

$$\frac{2^{2013} + 2^{2011}}{2^{2011} - 2^{2009}}$$

   Jawab :

$$\frac{2^{2009+4} + 2^{2009+2}}{2^{2009+2} - 2^{2009}} = \frac{2^4.2^{2009} + 2^2.2^{2009}}{2^2.2^{2009} - 2^{2009}} = \frac{16.2^{2009} + 4.2^{2009}}{4.2^{2009} - 2^{2009}} = \frac{20.2^{2009}}{3.2^{2009}} = \frac{20}{3}$$

   Jadi,

$$\frac{2^{2013} + 2^{2011}}{2^{2011} - 2^{2009}} = \frac{20}{3}$$

11. Jika diketahui untuk $\sqrt{14x^2 - 20x + 48} + \sqrt{14x^2 - 20x - 15} = 9$, maka nilai dari $\sqrt{14x^2 - 20x + 48} - \sqrt{14x^2 - 20x - 15}$ adalah

Jawab :
Misalkan
$p = 14x^2 - 20x + 48$
$q = 14x^2 - 20x - 15$
maka,
$\sqrt{p} + \sqrt{q} = 9$
$\sqrt{p} = 9 - \sqrt{q}$ (masing-masing ruas dikuadratkan)
$p = 81 - 18\sqrt{q} + q$
$14x^2 - 20x + 48 = 81 - 18\sqrt{q} + 14x^2 - 20x - 15$
$48 = 66 - 18\sqrt{q}$
$18\sqrt{q} = 66 - 48 = 18$
$\sqrt{q} = 1$
Sehingga kita dapatkan nilai $\sqrt{p} = 8$.
Jadi, $\sqrt{14x^2 - 20x + 48} - \sqrt{14x^2 - 20x - 15} = 8 - 1 = 7$

12. Hitunglah nilai untuk $\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots}}}}$

Jawab :
Misalkan bahwa
$\sqrt{1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + (x+3)\sqrt{...}}}}}} = x$, dengan $x > 0$

Akan kita tunjukkan dengan bukti sebagai berikut :

$x^2 = 1 + (x^2 - 1)$

$x^2 = 1 + (x-1)(x+1)$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{(x+1)^2}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + ((x+1)^2 - 1)}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + (x+1-1)(x+1+1)}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + x(x+2)}$

$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{(x+2)^2}}$

$$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + ((x+2)^2 - 1)}}$$

$$x^2 = 1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{...}}}}$$

$$x = \sqrt{1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{...}}}}}$$

Akibatnya : $\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + 6\sqrt{...}}}}}} = 2 + 1 = 3$

13. (**Philippine Mathematical Olympiad 2009**)
Sederhanakanlah

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}} + \sqrt{10+\sqrt{2}} + \ ... \ + \sqrt{10+\sqrt{98}} + \sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}} + \sqrt{10-\sqrt{2}} + \ ... \ + \sqrt{10-\sqrt{98}} + \sqrt{10-\sqrt{99}}}$$

Jawab :

Pada bentuk penjumlahan suku dari pecahan di atas dapat di tuliskan menjadi

$$\frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}$$

Karena $\sqrt{10+\sqrt{x}} > \sqrt{10-\sqrt{x}}$

Selanjutnya dapat kita tuliskan menjadi $\sqrt{10-\sqrt{x}} + y = \sqrt{10+\sqrt{x}}$

Penyelesaian untuk y adalah: $y = \sqrt{10+\sqrt{x}} - \sqrt{10-\sqrt{x}}$

$$y = \sqrt{\left\{\sqrt{10+\sqrt{x}} > \sqrt{10-\sqrt{x}}\right\}^2}$$

$$y = \sqrt{20 - 2\sqrt{100-x}}$$

Kembali pada persamaan mula-mula, kita mempunyai

$$\frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}} = \frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}\ +\ y}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}} = \frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}+\sqrt{20-2\sqrt{100-x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}$$

$$= 1 + \frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{20-2\sqrt{100-x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}$$

$$= 1 + \sqrt{2}\left\{\frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{100-x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}\right\}$$

Sekarang, faktor dari $\frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{100-x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}}$ adalah sama dengan 1, karena

$\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{100-x}} =$

$\sqrt{10-\sqrt{100-1}} + \sqrt{10-\sqrt{100-2}} + \ \dots\ + \sqrt{10-\sqrt{100-99}}$

$$= \sqrt{10-\sqrt{99}} + \sqrt{10-\sqrt{98}} + \ \dots\ + \sqrt{10-\sqrt{1}} = \sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}$$

Sehingga

$$\frac{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{x}}}{\sum_{x=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{x}}} = 1+\sqrt{2}$$

14. (OMITS 2012)
Nilai maksimum untuk perbandingan antara bilangan empat digit *abcd* dan jumlah digit-digitnya adalah…

Jawab :
abcd/(a + b + c + d) supaya maksimum maka a + b + c + d harus sekecil-kecilnya, 0 tidak mungkin,
Sehingga yang mungkin a = 1, b = c = d =0, atau a + b + c + d = 0, maka hasinya adalah
1000/1 = 1000
Jadi nilai maksimumnya adalah 1000

15. (OMITS 2012)
Bila diketahui
$n! =$
$2^{73}.3^{34}.5^{21}.7^{11}.11^{6}.13^{5}.17^{4}.19^{4}.23^{3}.29^{2}.31^{2}.37^{2}.41.43.47.53.59.61.67.71.73$
maka nilai *n* berikut yang memenuhi adalah… .
a. 74 b. 75. c. 76. d. 77. e. 78
Jawab :

Untuk menjawab soal di atas, coba kita perhatikan

- Bilangan 73 hanya digunakan sekali, sehingga kemungkinan n ≥ 73
- Bilangan 19 digunakan sebanyak 4 kali, misalkan saja. 19 x 4 = 76, sehingga kemungkinan juga n ≥ 76
- Bilangan 11 digunakan 6 kali, sehingga 11 x 6 = 66, dan akibatnya bilangan 77 tidak akan muncul, maka n < 77 atau 76 ≤ n < 77
- Perhatikan bilangan 5 digunakan pada soal sebanyak 21 kali, padahal penggunaan bilangan 5 jika dirinci sebagai berikut;

1. 5 (1 kali), 15 (1 kali), 25=5x5 (2 kali), 35 (1 kali), 45 (1 kali), 55=5x11 (1 kali), 65 (1 kali), 75=5x5x5x3 (2 kali, berdasarkan poin ke-3)
2. 10 (1 kali), 20 (1 kali), 30 (1 kali), 40 (1 kali), 50=5x5x2 (2 kali), 60 (1 kali) 70 (1 kali)

hanya tertulis 18 kali.

Sehingga pilihan jawaban dari a sampai e tidak ada yang memenuhi

16. (OMITS 2012)
Jika, *a, b, c, d*, dan *e* mewakili digit-digit pada suatu bilangan yang dituliskan dalam basis tertentu. Maka banyaknya solusi (*a, b, c, d, e*) jika
$(abcd)_7 = (2012)_e$ adalah… .
a. 0 b. 1 c. 2 d. 3 e. 4

catatan :

$(abcd)_7$ adalah bilangan 4 digit *abcd* dalam basis 7

Jawab :

Perlu diketahui bahwa dari soal baik a, b, c, d, e tidak disyaratkan harus berbeda dan basis bilangan itu tertinggi adalah 10.

Sebelah kiri tanda sama dengan,

Jika $(abcd)_7$ ingin diubah ke dalam basis 10, maka

$(abcd)_7$ = a.(7^3) + b.(7^2) + c.(7^1) + d.(7^0) = 343.a + 49.b + 7.c + d

Karena *a, b, c,* dan *d* adalah bilangan dalam basis 7, maka akan berakibat bahwa;

* untuk nilai *a*, berlaku : $1 \le a \le 6$

* untuk nilai *b*, *c*, dan *d* berlaku $0 \le a \le 6$

Sebelah kanan tanda sama dengan,

dengan langkah yang sama, misalkan kita ubah ke dalam basis 10, maka

$(2012)_e$ = 2.(e^3) + 0.(e^2) + 1.(e^1) + 2.(e^0) = 2.(e^3) + e + 2.

Sehingga

1. jika $(2012)_e$ kita jadikan dalam basis 10 maka $(2012)_e$ = 2012 dan $(abcd)_7$ bilangan dalam basis 7, maka
nilai a = 2012/343 = 5,... , dari sini kita pilih a = 5 dan 5 x 343 = 1715, serta 2012 – 1715 = 297.
Kemudian 297 sebagai sisa dibagi 49, maka 297/49 = 6,... ,dari sini pilih b = 6 dan 49 x 6 = 294, serta 297 – 294 = 3. Langkah berikutnya 3 sebagai sisa tidak dapat dibagi 7, sehingga 3 secara otomatis menjadi bilangan satuan, dan pada akhirnya didapat $(2012)_{10}$ = $(5603)_7$

Sehingga untuk langkah ini diperoleh pasangan (*a,b,c,d,e*) = (5,6,0,3,10)

2. Dengan langkah yang kurang lebih sama, kita pilih secara berurutan *e* dengan harga; 9, 8, 7, 6, tetapi *e* tidak diperkenankan berharga 5 karena saat *e* = 5, $(2012)_5$ = 2.125 + 0.25 + 1.5 + 2 = 257 < 343 ≤ a (a tidak boleh berharga nol)

Sehingga total ada 5 pasangan (*a,b,c,d,e*), yaitu

- (5,6,0,3,10)
- (4,1,6,6,9)
- (2,2,0,5,8)
- (2,0,1,2,7)
- (1,1,6,6,6)

Sehingga menurut saya baik jawaban tidak terdapat pada pilihan *a, b, c, d*, dan *e*

Silahkan anda cek sendiri apa dalam perhitungan saya ada yang ketinggalan, terima kasih atas segala atensinya untuk pembaca yang budiman, apa bila dalam tulisan ini terdapat kekeliruan maka saya akan dengan senang hati untuk membetulkannya

17. (OMITS 2012)

Jika pada persegi ajaib jumlah angka setiap baris, setiap kolom dan setiap diagonal sama dan untuk persegi ajaib ukuran 4 x 4 jumlah angka setiap baris adalah 34, tentukan jumlah angka setiap baris pada persegi ajaib 12 x 12 ?

(Catatan : persegi ajaib *n x n* hanya terisi angka – angka dari 1 sampai n^2)

Jawab :

Jika persegi ajaib ukuran 4 x 4 jumlah angka setiap barisnya 34, maka kalau untuk 12 x 12 = ….

Gunakan rumus untuk persegi ajaib yang angka penyusunnya dari 1 sampai n^2 = *1/2. n.(n^2 + 1)*

Sehingga untuk ukuran 12 x 12 jumlah angka setiap barisnya = $\frac{1}{2}$. 12 . (12^2 + 1) = 6 . (144 + 1) = 870

18. (OMITS 2012)

$$\begin{cases}(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\log(y^2+2x) = 0\end{cases}$$

Penyelesaian dari persamaan di atas adalah… .

Jawab :

Kita tulis ulang soal di atas, yaitu ;

$$\begin{cases}(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .1) \\ y^3+4x+1+\log(y^2+2x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .2)\end{cases}$$

Dari persamaan pertama

$(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1}$, akan kita peroleh

$$\left(1+\frac{4^{2x}}{4^y}\right)\frac{5.5^y}{5^{2x}} = 1+\frac{2.2^{2x}}{2^y}$$

$$\left(1+\frac{4^{2x}}{4^y}\right)\frac{5.5^y}{5^{2x}} - \frac{2.2^{2x}}{2^y} = 1$$

$$\left(\frac{4^y+4^{2x}}{4^y}\right)\frac{5.5^y}{5^{2x}} - \frac{2.2^{2x}}{2^y} = 1$$

$$\frac{5.4^y.5^y+5.4^{2x}.5^y-2^y.5^{2x}.2.2^{2x}}{4^y.5^{2x}} = 1$$

$\frac{5.5^y.2^{2y}+5.2^{4x}.5^y-2.2^y.2^{2x}.5^{2x}}{2^{2y}.5^{2x}} = 1$

$5.5^y.2^{2y} + 5.2^{4x}.5^y - 2.2^y.2^{2x}.5^{2x} = 2^{2y}.5^{2x}$

$5.5^y.2^{2y} + 5.2^{4x}.5^y = 2.2^y.2^{2x}.5^{2x} + 2^{2y}.5^{2x}$

$5^{y+1}(2^{2y} + 2^{4x}) = 5^{2x}(2^{2y} + 2^{2x+y+1})$, sampai dengan langkah di sini kita mendapatkan

$y + 1 = 2x$ atau $y = 2x - 1$ .... 3)

Selanjutnya dari persamaan 3) kita substitusikan ke persamaan 2), sehingga

Untuk persamaan 2)

$y^3 + 4x + 1 + \log(y^2 + 2x) = 0$

$y^3 + 2.2x + 1 + \log(y^2 + y + 1) = 0$

$y^3 + 2.(y + 1) + 1 + \log(y^2 + y + 1) = 0$

$y^3 + 2y + 3 + \log(y^2 + y + 1) = 0$

$\log(y^2 + y + 1) = -(y^3 + 2y + 3)$

$-\log(y^2 + y + 1) = (y^3 + 2y + 3)$

$\log(y^2 + y + 1)^{-1} = y^3 + 2y + 3$

$\log\frac{1}{(y^2+y+1)} = y^3 + 2y + 3$

$\frac{1}{(y^2+y+1)} = 10^{(y^3+2y+3)}$,kalau kita ubah dalam variabel *x*, karena $y = 2x - 1$ maka

$\frac{1}{(4x^2-2x+1)} = 10^{8x^3-12x^2+10x}$

$\frac{1}{(4x^2-2x+1)} = 10^{x(8x^2-12x+10)}$

Sampai langkah di sini, ambil $x = 0$, maka

$\frac{1}{0-0+1} = 10^0 \Leftrightarrow 1 = 1$, memenuhi, sehingga jika $x = 0$ didapat $y = -1$

Untuk yang lain tidak ada yang memenuhi

Jadi, nilai x dan y yang memenuhi adalah, $x = 0$ dan $y = -1$

19. (OMITS 2012)

Sisa pembagian untuk suku banyak *f(x) = (x – a)(x – b)* adalah …

Jawab :
Rumus untuk sisa pembagian
S(x) = *px + q*
dengan

$$p = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$q = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{a - b}$$

Atau

$$S(x) = \frac{(x-b)f(a)}{a-b} + \frac{(x-a)f(b)}{b-a}$$

20. Jika diketahui $2 + \sqrt{3}$ adalah salah satu dari penyelesaian dari persamaan

$$x^4 - 14x^3 + 5x^2 - 62x + 13 = 0.$$

Carilah tiga akar yang lain ?

Jawab :

Perhatikanlah salah satu akar yang sudah diketahui adalah berupa bilangan irasional(bilangan bentuk akar), maka salah satu akar yang lainpun juga akan berupa bilangan irasional pula karena seluruh koefisien persamaan di atas berupa bilangan bulat. Dari sini kita bisa menebak salah satu akar yang lain tadi adalah sebuah bilangan irasional sekaligus sekawan (konjugasi) dari $2 + \sqrt{3}$ yaitu $2 - \sqrt{3}$.

Misalkan $x = 2 + \sqrt{3}$ selanjutnya kita namakan x_1 dan $x = 2 - \sqrt{3}$ kita tetapkan sebagai x_2. Untuk $\left(x - (2 + \sqrt{3})\right) = 0$ dan $\left(x - (2 - \sqrt{3})\right) = 0$ akan didapatkan $\left(x - (2 + \sqrt{3})\right)\left(x - (2 - \sqrt{3})\right) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$. Langkah berikutnya kita tinggal mengarahkan jawaban kita ke persamaan $x^4 - 14x^3 + 54x^2 - 62x + 13 = 0$.

Bagian konstan persamaan tersebut adalah 13, maka

$x^4 - 14x^3 + 54x^2 - 62x + 13 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - ax + 13)$

$x^4 - 14x^3 + 54x^2 - 62x + 13 = x^4 - (a+4)x^3 + (4a+14)x^2 - (52+a)x + 13$

Dari persamaan di atas didapatkan $14 = a + 4 \Rightarrow a = 10$, selanjutnya nilai a kita substitusikan ke $x^2 - ax + 13$ menjadi $x^2 - 10x + 13$.

Untuk $x^2 - 10x + 13$ kita dapatkan $x_{3,4} = 5 \pm 2\sqrt{3}$ dengan rumus abc.

Jadi, tiga akar yang lain adalah $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, $x_3 = 5 + 2\sqrt{3}$ dan $x_4 = 5 - 2\sqrt{3}$.

21. (OMITS 2012)
Diketahui $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$ adalah akar-akar untuk persamaan
$w^8 + \frac{1}{1-\sqrt[4]{5}} + \frac{1}{1+\sqrt[4]{5}} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = 0$
Jika jumlah dari akar- akar persamaan tersebut adalah v, maka nilai dari v^2 adalah …

Jawab :
Karena yang ditanyakan adalah jumlah akar – akar dari persamaan di atas dan jumlah dari akar – akar persamaan tersebut adalah
$v = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8 = -\frac{Koefisien\, w^7}{Koefisien\, w^8} = -\frac{0}{1} = 0$
[Perhatikan bahwa tidak ada koefisien w^7, sehingga koef w^7 = 0]
Jadi nilai v^2 = 0

22. Jika p, q dan r adalah akar – akar berbeda dari $4x^3 + 7x^2 - 3x + 6 = 0$, maka nilai $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}$ adalah….

Jawab :

Dari soal diketahui bahwa persamaan polinom $4x^3 + 7x^2 - 3x + 6 = 0$ dengan akar – akar p, q dan , serta

$p + q + r = -\frac{b}{a}$, $pq + pr + qr = \frac{c}{a}$ dan $= -\frac{d}{a}$, dari **bentuk umum :** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Maka

$p + q + r = -\frac{7}{4}$, $pq + pr + qr = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ dan $= -\frac{6}{4}$.

Sehingga

$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \left(\frac{pq+pr+qr}{pqr}\right)^2 - 2\left(\frac{p+q+r}{pqr}\right)$

$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \left(\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{\left(-\frac{6}{4}\right)}\right)^2 - 2\left(\frac{\left(-\frac{7}{4}\right)}{\left(-\frac{6}{4}\right)}\right)$

$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{6}\right)$

$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4} - \frac{7}{3} = -\frac{25}{12}$

23. (OMITS 2012)

Tentukan jumlah semua koefisien dari *S(x)* jika

$S(x) = (1+x)^{1000}$ + x$(1+x)^{999}$ + $x^2(1+x)^{998}$+ . . . + x^{1000}

Jawab :

Kita cek untuk *n* sebagai pangkat, kita substitusikan nilai

n = 1 ⟹ S(x) = $(1+x)^1$ + x^1 = 1 + x + x = 1 + 2x , jika x = 1 ⟹ S(x) = 3

S(x) = $2^2 - 1$

n = 2 ⟹ S(x) = $(1+x)^2$ +(1 + x).x + x^2 = 3x^2 + 3x + 1 , jika x =1 ⟹ S(x) = 7

S(x) = $2^3 - 1$

dst

n = 1000 ⟹ S(x) = $2^{1001} - 1$

24. (Soal Olimpiade Sains 2012 Matematika SMA/MA. PORSEMA NU VIII PW. LP. MA'ARIF NU JAWA TENGAH)

Jika $f(x) = \frac{x}{x-1}$ maka $f(3x)$ dapat dinyatakan dengan :

a. $\frac{3f(x)}{2f(x)-1}$ b. $\frac{f(x)}{2f(x)+1}$ c. $\frac{3f(x)}{2f(x)+5}$

d. $\frac{3f(x)}{f(x)+1}$ e. $\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$

Jawab :

Dari soal diketahui $(x) = \frac{x}{x-1}$. Maka

$$f(3x) = \frac{3x}{3x-1} = \left(\frac{\left(\frac{3x}{x-1}\right)}{\left(\frac{3x-1}{x-1}\right)}\right) = \left(\frac{3\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{2x}{x-1} + \frac{x-1}{x-1}}\right) = \left(\frac{3\left(\frac{x}{x-1}\right)}{2\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1}\right) = \frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

Jadi , pilihan jawaban yang benar adalah **E**

25. Hitunglah nilai untuk $\sqrt{1 + 2010.2011.2012.2013}$

Jawab :

Kita misalkan $f(x) = \sqrt{1 + x(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Sehingga kita sebenarnya mencari nilai $f(2010)$

$$f(x) = \sqrt{1 + x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$= \sqrt{1 + (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)}$, misalkan saja $a = x(x+3)$

$= \sqrt{1 + a(a+2)}$

$= \sqrt{a^2 + 2a + 1}$

$= \sqrt{(a+1)^2}$

$= |x(x+3) + 1|$

$f(2010) = 2010.2013 + 1$

26. Jika fungsi f terdefinisikan untuk semua bilangan bulat positif serta memenuhi :

$$f(1) = 2012,$$

serta

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = n^2 f(n).$$

Tentukanlah nilai dari $f(2012)$?

Jawab :

- $f(1) = 1^2 f(1) = f(1) = 2012$
- $f(1) + f(2) = 2^2 f(2) = 4f(2)$

  $\Leftrightarrow 2012 + f(2) = 4f(2)$

  $\Leftrightarrow 3f(2) = 2012$

  $\Leftrightarrow f(2) = \frac{1}{3}.2012$
- $f(1) + f(2) + f(3) = 3^2 f(3) = 9f(3)$

  $\Leftrightarrow 2012 + \frac{1}{3}.2012 + f(3) = 9f(3)$

  $\Leftrightarrow 8f(3) = 2012 + \frac{1}{3}.2012 = \frac{4}{3}.2012$

  $\Leftrightarrow f(3) = \frac{1}{6}.2012$
- $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 4^2 f(4) = 16f(4)$

  $\Leftrightarrow 2012 + \frac{1}{3}.2012 + \frac{1}{6}.2012 + f(4) = 16f(4)$

  $\Leftrightarrow 15f(4) = 2012 + \frac{1}{3}.2012 + \frac{1}{6}.2012 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)2012 = \frac{9}{6}.2012$

  $\Leftrightarrow f(4) = \frac{1}{10}.2012$

  dst

Dari uraian di atas didapatkan :

- $f(1) = 2012$
- $f(2) = \frac{1}{3}.2012 = \frac{1}{1+2}.2012$
- $f(3) = \frac{1}{6}.2012 = \frac{1}{1+2+3}.2012$
- $f(4) = \frac{1}{10}.2012 = \frac{1}{1+2+3+4}.2012$

  dst.

  Sehingga,
- $f(2012) = \frac{1}{1+2+3+\cdots+2012}.2012 = \frac{1}{\frac{2012.2013}{2}}.2012 = \frac{2}{2012.2013}.2012 = \frac{2}{2013}$.

Jadi, $f(2012) = \frac{2}{2013}$.

27. Suatu fungsi didefinisikan sebagai

$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$, $f(4) = 10$. Tentukan nilai dari $f(2012)$?

Jawab :

Dari soal diketahui bahwa

$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ dan $f(4) = 10$, maka

- $f(4) = f(0+4) = f(0) + f(4) + 0.4 \Leftrightarrow 10 = f(0) + 10 + 0 \Longrightarrow f(0) = 0$
- $f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) + 2.2 \Leftrightarrow 10 = 2f(2) + 4 \Longrightarrow f(2) = 3$
- $f(4) = f(1+3) = f(1) + f(3) + 1.3$
- $f(3) = f(1+2) = f(1) + f(2) + 1.2$

Dari poin 3 dan 4 kita anggap sebagi persamaan 3 dan 4, sehing kalau kita tulis ulang maka

$f(4) = f(1+3) = f(1) + f(3) + 1.3 \Longrightarrow 10 = f(1) + f(3) + 3 \Longrightarrow f(1) + f(3) = 7$..3)

$f(3) = f(1+2) = f(1) + f(2) + 1.2 \Longrightarrow\ f(3) = f(1) + 3 + 2 \Longrightarrow (1) - f(3) = -5$ ....4)

Dengan metode eliminasi kita akan mendapatkan $f(1) = 1, f(3) = 6$.

Kalau kita tulis semuanya, maka
$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 6, dan\ f(4) = 10$ sehingga dari hasil bilangan yang kita dapatkan ternyata membentuk pola barisan bilangan dengan pola tertentu yaitu $U_n = f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sehingga $f(2012) = \frac{2012.2013}{2} = 1006.2013$

28. (OMITS 2012)
Jika suatu fungsi didefinisikan dengan
f(a) = FPB(2012,a)
g(a) = FPB(a,2012)
g^2(a) = (g(a))
g^3(a) = g(g(g(a)))
dst
Maka nilai $g^{2012}(f(100))$ adalah …

Jawab :
f(100) = FPB(2012,100) = 4, karena 2012 = 4 x 503 dan 100 = 4 x 25
503 adalah bilangan prima

g^{2012}*(f(100)) =* g^{2012}*(4)*
g^{2012}*(4) =* g^{2011} *(f (4))* dengan g*(4) = FPB(4,2012) = 4*
Sehingga begitu seterusnya
Jadi g^{2012}*(f(100)) = 4*

29. (OMITS 2012)

Untuk fungsi *Ackermann* yang didefinisikan dengan beberapa fungsi sebagai berikut :

- *f(0,y) = y – 1*
- *f(x + 1,y – 1) = f(0,f(x,y))*
- *g(x, 0) = 3*
- *g(x – 2, y + 1) = =f(x – 1, g(x,y))*
- *h(x,0) = 2*
- *h(h – 1, y) = g(x – 1, h(x – 2, y – 1))*
- *i(0, y + 1) = y – 1*
- *i(x,y) = h(y – 1, i(x – 1,y))*

Nilai untuk *i(6,7)* adalah …

Jawab :

Melihat fungsi di atas tentunya filing kita sudah dapat menebak bahwa jawabannya pasti membutuhkan langkah yang panjang dan menjemukan.

Coba anda perhatikan pada fungsi di atas, untuk harga *x, y* pada fungsi *i* ternyata harganya tergantung dengan fungsi *h* dan fungsi *h* bergantung pada fungsi *g* demikian juga fungsi *f.*

Dan fungsi *g* sendiri berakhir dengan nilai konstan 3, silahkan anda cek sendiri

Sehingga Jawab fungsi *Ackermann* di atas adalah 3

30. Tunjukkan $\sqrt{2}$ dalam bentuk *pembagian bersambung* (**continued fractions**)!

Jawab :

Misal $x^2 = 2$ maka $x = \sqrt{2}\ (untuk\ nilai\ positif)$, dan juga $x^2 - 1 = 1$ maka

$(x+1)(x-1)=1 \iff (x-1)=\frac{1}{x+1} \iff x=1+\frac{1}{x+1}$

Perhatikan bahwa

$x=1+\frac{1}{x+1} \iff x=1+\frac{1}{1+\boldsymbol{x}}$,

sehingga $x=1+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+x}\right)}$

$$x=1+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\boldsymbol{x}}\right)} \iff x=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\boldsymbol{x}}\right)}\right)}}$$

Jika substitusi untuk x kita teruskan , maka kita akan mendapatkan

$$x=\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}}}$$

31. Hitunglah $\sqrt[8]{2207-\frac{1}{2207-\frac{1}{2207-\cdots}}}$, nyatakan jawabannya dalam bentuk $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$, dengan a, b, c, d adalah bilangan – bilangan bulat.

Jawab :

Perhatikan bahwa $x \neq 0$

Misal $x=\sqrt[8]{2207-\frac{1}{2207-\frac{1}{2207-\cdots}}}$, maka

$x^8=2207-\frac{1}{2207-\frac{1}{2207-\cdots}} \implies x^8=2207-\frac{1}{x^8}$

$x^8+\frac{1}{x^8}=2207 \iff \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2=2207+2=2209$

$\iff x^4+\frac{1}{x^4}=\sqrt{2209}=47$

$\iff \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=47+2=49$

$\iff x^2+\frac{1}{x^2}=\sqrt{49}=7$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 7+2 = 9$

$\Leftrightarrow +\frac{1}{x} = 3$, masing – masing ruas dikalikan dengan x , maka didapatkan

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, sehingga

$\frac{a+b\sqrt{c}}{d} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

32. Untuk $x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} = 2$, tentukan nilai x?

Jawab :

Perhatikan bahwa

$x^{x^{x^{\cdots}}} = 2$ dapat dituliskan $x^{\left(x^{x^{\cdots}}\right)} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Bagaimana jika $x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} = 4$?

33. (OMITS 2012)

Untuk bilangan positif x, dipenuhi kondisi

$2012 = \left.x^{x^{x^{x^{\cdots^{x^{2012}}}}}}\right\} terdiri\ dari\ 2012\ x$, tentukan nilai x?

Jawab :

$2012 = x^{x^{x^{\cdots^{x^{2012}}}}}$, karena x-nya sebanyak 2012 maka

$2012 = \left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right)^{2012} \Leftrightarrow \left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right)^{2012} = 2012 \Leftrightarrow x^{x^{x^{\cdots^{x}}}} = 2012^{\frac{1}{2012}} = \sqrt[2012]{2012}$

Untuk langkah berikutnya,

$$2012^{\frac{1}{2012}} = \sqrt[2012]{2012} = \left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right)^{x} \Big\} \; dengan\ x\ sebanyak\ 2011\ dalam\ tanda\ kurung$$

$$\left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right) = \left(2012^{\frac{1}{2012}}\right)^{\frac{1}{x}} = 2012^{\frac{1}{2012x}}\ .$$

$$2012^{\frac{1}{2012x}} = \left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right)^{x} \Big\} \; dengan\ x\ sebanyak\ 2010\ dalam\ tanda\ kurung$$

$$\left(x^{x^{x^{\cdots^{x}}}}\right) = \left(2012^{\frac{1}{2012x}}\right)^{\frac{1}{x}} = 2012^{\frac{1}{2012x^{2}}}$$

Jika langkah seperti ini diteruskan sampai ruas kiri hanya tersisa satu x saja maka

$$x = 2012^{\frac{1}{2012x^{2011}}} \Leftrightarrow x^{2012x^{2011}} = 2012$$

Dengan menggunakan aturan logaritma, maka

log $x^{2012x^{2011}}$ = log 2012

$$\Leftrightarrow 2012x^{2011}.\log x = \log 2012$$

$$\Leftrightarrow x^{2011}\log x = \frac{\log 2012}{2012}$$

$$\Leftrightarrow \log(x^{2011}\log x) = \log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2011\log(x\log x) = \log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log(x\log x) = \frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}$$

$$\Leftrightarrow \log(\log x^{x}) = \frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}$$

$$\Leftrightarrow \log x^{x} = 10^{\frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}}$$

$$\Leftrightarrow x^{x} = 10^{10^{\frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[x]{10^{10^{\frac{\log\left(\frac{\log 2012}{2012}\right)}{2011}}}}$$

34. Hitunglah nilai dari $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}}$

Jawab :

Misalkan $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}}$ kuadratkan masing-masing ruas, maka akan didapatkan

$$x^2 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}}$$

$\Leftrightarrow\ x^2 = 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0\ atau\ x = 2$

Jadi $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}} = 2$

35. Hitunglah nilai $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}$

Jawab :

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}} = 2$

Untuk caranya diserahkan pada pemirsa

36. Hitunglah nilai $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\dots}}}}$

Jawab :

$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\dots}}}} = 1$

Untuk caranya juga diserahkan pada pemirsa

37. Hitunglah nilai $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\dots}}}}}$

Jawab :

Misalkan

$x = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\dots}}}}}$ kuadratkan masing-masing ruas, sehingga

$x^2 = 3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\dots}}}}}}}}$ kuadratkan sekali lagi masing-masing ruas

$(x^2)^2 = 9.5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\dots}}}}}}}}$

$x^4 = 45x$

$\Leftrightarrow x^4 - 45x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^3 - 45) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; atau \; x^3 = 45$

Jadi $x = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5}\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\ldots}}}}}} = \sqrt[3]{45}$

38. Tentukan Himpunan Penyelesaian (HP) untuk persamaan

$$4\left(16^{sin^2x}\right) = 2^{6sinx} \text{ untuk } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Jawab :

$4\left(16^{sin^2x}\right) = 2^{6sinx}$ dengan $0 \leq x \leq 360^0$

$2^2\left(2^{4.sin^2x}\right) = 2^{6sinx}$

$2^{2+4sin^2x} = 2^{6sinx}$, ingat bahwa: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Longrightarrow f(x) = g(x)$

$2 + 4sin^2x = 6sinx$

$\Leftrightarrow 4sin^2x - 6sinx + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2sin^2x - 3sinx + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2sinx - 1)(sinx - 1) = 0$

$\Leftrightarrow sinx = \frac{1}{2} \text{ V } sin = 1$

- Untuk $sinx = \frac{1}{2}$, dengan rumus $x^0 = \alpha + k.360^0$ dan $x^0 = (180 - \alpha)^0 + k.360^0$ didapatkan $x_1^0 = 30^0$ dan $x_2^0 = 150^0$.
- Untuk $sinx = 1$, didapatkan $x_3^0 = 90^0$.

Jadi, $\text{HP} = \{30^0, 90^0, 150^0\}$.

39. (OMITS 2012)

Ardo, Romdhoni, Ahmad, Aji dan Romi mengikuti pemilihan presiden RI secara independen. Pada akhir perhitungan suara, yang mendapat suara tertinggi pertama a kan menjadi Presiden dan yang memperoleh suara tertinggi kedua akan menjadi wakilnya. Jika Ardo mendapatkan suara 2012 lebih banyak dari Romdhoni dan 2056 lebih sedikit dari Ahmad. Romi menerima 2012 suara lebih sedikit dari Aji dan 2076 suara lebih banyak dari Romdhoni. maka yang terpilih jadi Presiden dan wakilnya adalah ...

Jawab :

Ardo = 2012 + Romdhoni ----------- 1)
Ardo - Romdhoni = 2012
Ardo = -2056 + Ahmad ---------------2)
Ahmad - Ardo = 2056
Romi = -2012 + Aji --------------------3)
Aji - Romi = 2012
Romi = 2076 + Romdhoni -------------4)
Romi - Rhomdhoni = 2076
Maka
Dari persamaan 4 dan 3 diperoleh Aji - Romdhoni = 4088 -------------------5)
persamaan 2 dan 1 diperoleh Ahmad - Romdhoni = 2078 -------------------6)
Dari persamaan 5 dan 6 diperoleh Aji - Ahmad = 10
Sehingga dari beberapa persamaan di atas didapatkan

- Aji = Ahmad + 10 --------------> Aji > Ahmad
- Ahmad = Ardo + 2056 ---------> Ahmad > Ardo
- Aji = Romi + 2012 --------------> Aji > Romi
- Romi = Romdhoni + 2076 -----> Romi > Romdhoni

Jadi dari uraian diatas jelas yang jadi Presiden = yang mendapatkan nilai terbanyak adalah Aji dan Ahmad sebagai wakilnya

40. Carilah semua nilai a, b, c yang memenuhi sistem persamaan berikut :

$$a^2 + ab + ac = 21,$$
$$b^2 + bc + ab = 11,$$
$$c^2 + ac + bc = 17.$$

Jawab :

$a^2 + ab + ac = 21$ ...... 1)

$b^2 + bc + ab = 11$ ...... 2)

$c^2 + ac + bc = 17$ .... 3)

Jika ketiga persamaan di atas dijumlahkan maka akan didapatkan

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 49 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 7^2 \Leftrightarrow a + b + c = \pm 7$

- Untuk $a + b + c = \pm 7 \Rightarrow b + c = \pm 7 - a$ kita substitusikan ke persamaan 1), maka akan didapatkan $a^2 + a(b + c) = 21 \Rightarrow a^2 + a(\pm 7 - a) = 21$. Sehingga $a^2 \pm 7a - a^2 = 21 \Rightarrow \pm 7a = 21 \Rightarrow a = \pm 3$.

- Dengan cara yang sama kita akan mendapatkan untuk nilai $b = \pm\frac{11}{7}$ dan $c = \pm\frac{17}{7}$

Jadi, nilai $a = \pm 3, b = \pm\frac{11}{7}$ dan $c = \pm\frac{17}{7}$.

41. Carilah semua nilai c sehingga persamaan $x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$ mempunyai tepat 2 akar nyata untuk x.

Jawab :

$x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - c = \sqrt{8x^2 - 32x - 8c}$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x - c)^2 = 8(x^2 - 4x - c)$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - c = 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - c - 8 = 0$

Karena mempunyai 2 akar nyata maka D > 0

$b^2 - 4ac > 0$

$\Leftrightarrow (-4)^2 - 4.1.(-c - 8) > 0$

$\Leftrightarrow 16 + 4c + 32 > 0$

$\Leftrightarrow c > -12$

Jadi, semua nilai c adalah > -12 , $c \in R$.

42. (OMITS 2012)

Persamaan kuadrat (PK) mempunyai koefisien bilangan bulat dan akar-akarnya cos 72^0 dan cos 144^0 adalah. …

Jawab :

PK tersebut mempunyai akar-akar x_1 = cos 72^0= $\frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$ dan x_2 = cos 144^0 = $\frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5}\right)$

PK barunya adalah

x^2 -(x_1+x_2)x + $x_1 . x_2$ = 0

x_1 + x_2 = $\frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$ + $\frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5}\right)$= -1/2

$x_1 . x_2$ = [$\frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$].[$\frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5}\right)$] = -1/4

Sehingga

x^2 - (x_1+x_2)x + $x_1 . x_2$ = 0
x^2 - ($-\frac{1}{2}$)x + $\left(-\frac{1}{4}\right)$ = 0
Maka persamaan menjadi
$4x^2 + 2x - 1 = 0$
Jadi PK tersebut adalah $4x^2 + 2x - 1 = 0$

43. Jika $|x|$ menyatakan nilai mutlak x, dimana $|x| = \begin{cases} x & jika\ x \geq 0 \\ -x & jika\ x < 0 \end{cases}$

Selesaikan persamaan $|x - 2| = 3$

Jawab :

Alternatif 1:

Jika $x \geq 2$, maka $x - 2 = 3$ sehingga $x = 5$

Tetapi bila $x < 2$, maka $2 - x = 3$ sehingga $x = -1$

Alternatif 2:

Karena $|x - 2|$ tidak akan pernah berharga negative maka kita dapat mengkuadratkan masing-masing ruas, sehingga

$(x - 2)^2 = 3^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5\ \ atau\ \ x = -1$

44. Carilah x yang memenuhi $x^2 + 4|x| - 5 = 0$

Jawab :

Jika $x \geq 0$, maka $x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -5\ atau\ x = 1$

Karena $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$, jadi yang memenuhi $x = 1$.

Jika $x < 0$, maka $x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 5\ atau\ x = -1$

Karena $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$, jadi yang memenuhi $x = -1$

Jadi nilai x yang diinginkan adalah -1 dan 1

45. Bentuk sederhana dari

$$\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

Jawab :

ingat

$$(x \pm y) = \left(\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

Sehingga

$$\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)} = \frac{\sqrt[3]{2^2}-1}{2-1} = \sqrt[3]{4}-1$$

46. Carilah semua nilai x yang memenuhi

$$\sqrt[3]{13x+37} - \sqrt[3]{13x-37} = \sqrt[3]{2}$$

Jawab :

Misalkan $a = 13x + 37$ dan $b = 13x - 37$, maka $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2}$.

Sehingga

$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{2}$ (masing – masing ruas di pangkatkan tiga)

$a = b + 2 + 3\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{2}\right)$

$\Leftrightarrow a - b - 2 = 3\sqrt[3]{2b}.\left(\sqrt[3]{a}\right)$

$\Leftrightarrow a - b - 2 = 3\sqrt[3]{2ab}$

$\Leftrightarrow (13x + 17) - (13x - 37) - 2 = 3\sqrt[3]{2(13x+37)(13x-37)}$

$\Leftrightarrow 72 = 3\sqrt[3]{2((13x)^2 - 37^2)}$

$\Leftrightarrow 24 = \sqrt[3]{2((13x)^2 - 37^2)}$

$\Leftrightarrow 24.24.24 = 2.((13x)^2 - 37^2)$

$\Leftrightarrow ((13x)^2 - 37^2) = 12.24.24$

$\Leftrightarrow (13x)^2 - 1369 = 6912$

$\Leftrightarrow (13x)^2 = 8281 = 91^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 7^2$

$\Leftrightarrow x = \pm 7$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $= \pm 7$.

47. Jika diberikan $a + b + c = 0$, tentukanlah nilai dari

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

Jawab :

Dari soal kita dapatkan ,

$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = \frac{a^3}{abc} + \frac{b^3}{abc} + \frac{c^3}{abc} = \frac{1}{abc}(a^3 + b^3 + c^3)$, dengan $a + b + c = 0$.

Perhatikan bahwa ,

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + 3bc(b + c) + 6abc$

$\Leftrightarrow 0^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(-c) + 3ac(-b) + 3bc(-a) + 6abc$

$\Leftrightarrow 0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$

Sehingga

$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = \frac{1}{abc}(a^3 + b^3 + c^3) = \frac{3abc}{abc} = 3$

Jadi, nilai $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = 3$.

48. (OMITS 2012)

Jika $\begin{cases} x^{(x+y)} = y^{12} \\ y^{(x+y)} = x^3 \end{cases}$

Tentukan solusi bulat untuk sistem persamaan di atas!

Jawab :

Misalkan kita gunakan aturan logaritma sebagai berikut;

$x^{(x+y)} = y^{12} \Longrightarrow$ (x+y) log x = 12 log y .... 1)

$y^{(x+y)} = x^3$ $\Longrightarrow$ (x+y) log y = 3 log x ....2)

Dari persamaan 2) diperoleh :

$\log y = \frac{3\log x}{(x+y)}$ ....3)

Persamaan 3) disubstitusikan ke persamaan 1), sehingga diperoleh

$(x+y)^2$= 3.12 = 36

sehingga (x+y +6)(x+y – 6) = 0

maka (x+y) = – 6 v (x+y) = 6

i) *untuk x+y = 6 , karena x dan y bulat,untuk harga positif, yang memungkinkan adalah*

x = 0, y = 6

x = 1, y = 5

x = 2, y = 4

x = 3, y = 3

x= 4, y = 2

x = 5, y = 1

x = 6, y = 0

ambil yang x = 4 dan y = 2, maka $x^6 = y^{12}$ dan $y^6 = x^3$ akan dipenuhi
ii) *untuk x+y = -6, tidak ada yang dipenuhi*
Jadi hanya ada **satu** jawaban

49. Tentukan semua solusi bilangan bulat x, y pada persamaan $2x + 12y = 99$

Jawab :
Soal di atas berkaitan dengan persamaan *Diophantine*
Perhatikan ruas kiri, $3x + 9y$ adalah bilangan yang habis dibagi 2 dan ruas kanan adalah 99 yang mana tidak habis dibagi 2
Jadi tidak ada penyelesaian

50. Tentukan semua solusi bilangan bulat x, y pada persamaan $2x + 12y = 100$

Jawab :
Jelas bahwa ruas kiri-kanan habis dibagi 2, sehingga
$2x + 12y = 100$ dibagi 2 menjadi
$x + 6y = 50 \Longrightarrow x = 50 - 6y$
Sehingga diperoleh nilai y banyak sekali, begitu pula dengan x

51. Jika $x, y \neq 0$, tunjukkan bahwa

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Jawab :

Tanpa mengurangi keumuman pada dua buah bilangan $, y \neq 0$, maka

$$(x - y)^2 \geq 0$$

atau

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Bagi kedua ruas dengan xy, diperoleh

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (terbukti)

52. Jika untuk a, b, c dan d adalah bilangan – bilangan real positif , buktika bahwa :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4.$$

Jawab :

Berdasarkan $AM \geq GM$

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a}{b} . \frac{b}{c} . \frac{c}{d} . \frac{d}{a}}$$

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}}{4} \geq \sqrt[4]{1}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}}{4} \geq 1$$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4$ (terbukti)

53. (OMITS 2012)

Jika Un = C(n,0) + C(n-1,1) + C(n-2,2) + C(n-3,3) + . . . untuk $n \geq 1$
Tentukan nilai U2012?

Jawab :
U_1 = C(1,0) + C(0,1) = 1 + 0 = 1
U_2 = C(2,0) + C(1,1) + C(0,2) = 1 + 1 + 0 = 2
U_3 = C(3,0) + C(2,1) + C(1,2) + C(0,3) = 1 + 2 + 0 + 0 = 3
U_4 = C(4,0) + C(3,1) + C(2,2) + C(1,3) + C(0,4) = 1 + 3 + 1 + 0 + 0 = 5
dst
Perhatikan bahwa $U_3 = U_2 + U_1$ dan $U_4 = U_3 + U_2$ atau $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ adalah barisan *Fibonacci*
Gunakan rumus $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+1}{k}$, untuk F_{n+1} adalah suku ke *n* pada barisan *Fibonacci*.
Sehingga $U_{2012} = \sum_{k=0}^{2011}\binom{2012-k}{k}$

54. (OMITS 2012)

Sebuah barisan didefinikan bahwa suku-sukunya merupakan penjumlahan faktor-faktor dari suku sebelumnya kecuali dirinya sendiri. Jika U_1 = 2012 dan U_n = *n*. Nilai *n* tersebut adalah …

Jawab :
U_1 = 2012, sebagai suku pertama
Faktor dari 2012 adalah 1, 2, 4, 503, 1006, 2012 tetapi 2012 sebagai faktor terakhir tidak diperlukan untuk memunculkan U2 = 1+ 2 + 4 + 503 + 1006 = 1516, untuk suku berikutnya akan saya tuliskan faktor yang tidak dirinya sendiri
U_2 = 1516
Faktor dari 1516 adalah 1, 2, 4, 379, 758 , 1516 dan jumlah faktornya adalah 1144
U_3 = 1144
Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 11, 13, 22, 26, 44, 52, 88, 104, 143, 286, 572, 1144 dan jumlahnya adalah 1376

U_4 =1376
Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 16, 32, 43, 86, 172, 344, 688, 1376 dan jumlahnya adalah 1396
U_5 = 1396
Faktornya adalah 1, 2, 4, 349, 698, 1396 dan jumlahnya adalah 1054
U_6 = 1054
Faktornya adalah 1, 2, 17, 34, 62, 527, 1054 dan jumlahnya adalah 674
U_7 = 674
Faktornya adalah 1, 2, 337, 674 dan jumlahnya adalah 340
U_8 = 340
Faktornya adalah 1, 2, 4, 5, 10, 17, 20, 34, 68, 85,170, 340 dan jumlahnya adalah 416
U_9 = 416
Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 16, 32, 13, 26, 52, 104, 208, 416 dan jumlahnya adalah 466
U_{10} = 466
Faktornya adalah 1, 2, 233, 466 dan jumlahnya adalah 236
U_{11} = 236
Faktornya adalah 1, 2, 4, 59, 118, 236 dan jumlahnya adalah 184
U_{12} = 184
Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 23, 46, 92, 184 dan jumlahnya adalah 176
U_{13} = 176
Faktornya adalah 1, 2, 4, 8, 16, 11, 22, 44, 88, 176 dan jumlahnya 196
U_{14} = 196
Faktornya adalah 1, 2, 4, 7, 14, 14, 28, 49, 98, 196 dan jumlahnya 217
U_{15} = 217
Faktornya adalah 1, 7, 31, 217 dan jumlahnya adalah 39
U_{16} = 39
Faktornya adalah 1, 3, 13, 39 dan jumlanya adalah 17
$U_1 7$ = 17
Jadi U_n = *n* dengan nilai *n* =17

55. (OMITS 2012)

Tentukan nilai dari

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ \dots+\frac{1}{2012.2013.2014.2015}$$

Jawab :
Sebenarnya soal seperti ini mudah ditebak dalam proses menyelesaikannya pasti menggunakan *prinsip teleskopis*, yaitu saling menghabiskan suku sebelahnya

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ \dots+\frac{1}{2012.2013.2014.2015}$$

Pecahlah masing masing-masing bilangan pecahan di atas menjadi penguran 2 bilangan pecahan dari bilangan(penyebut) pembentuknya

Perhatikan untuk

$$\frac{1}{1.2.3.4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)$$

$$\frac{1}{2.3.4.5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{60}\right)$$

...

...

...

dst

$$\frac{1}{2012.2013.2014.2015}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2012.2013.2014}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)$$

Perhatikan dengan prinsip teleskopis akan terlihat unik

Kita tulis ulang untuk langkah solusi di awal tadi, yaitu

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ \dots+\frac{1}{2012.2013.2014.2015}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\ +\ \frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}+\ \dots+\ \frac{1}{2012.2013.2014}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)$$

Jadi,

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ \dots+\frac{1}{2012.2013.2014.2015}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2013.2014.2015}\right)$$

56. (OMITS 2012)

Tentukan nilai dari

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{10}+\frac{5}{24}+\frac{8}{65}+\frac{13}{168}+\frac{21}{442}+\ .\ .\ .\ =\ .\ .\ .$$

Jawab :

Deret bilangan di atas mereupakan deret teleskopik, coba anda perhatikan penguraian dari bilangan di atas

1/2 = 1 − ~~1/2~~

2/3 = 1 − ~~1/3~~

3/10 = ~~1/2~~ − ~~1/5~~

5/24 = ~~1/3~~ – ~~1/8~~

8/65 = ~~1/5~~ – ~~1/13~~

13/168 = ~~1/8~~ – ~~1/21~~

21/442 = ~~1/13~~ – ~~1/34~~

………. = ~~……~~

dst

______________________ +

1 + 1 = 2

Jadi

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{5}{24} + \frac{8}{65} + \frac{13}{168} + \frac{21}{442} + . . . = 2$

57. (OMITS 2012)

Untuk jumlah 6036 suku pertama deret geometri adalah 1141 dan jumlah 4024 suku pertamanya sama dengan 780, maka jumlah 2012 suku pertamanya adalah. …

Jawab :

Misalkan suku pertama U_1= a, U_2= ar, U_3= ar^2, dan S_{2012} = jumlah 2012 suku pertama, S_{4024} = jumlah 4024 suku pertama serta S_{6036} = jumlah 6036 suku pertama, dimisalkan S_{2012} = x, ditanya S_{2012}?

maka, ($S_{4024} - S_{2012}$) x ($S_{4024} - S_{2012}$) = (S_{2012}) x ($S_{6036} - S_{4024}$)

Sehingga (780 – x)(780 – x) = x. (1141 – 780)

608400 -1560x + x^2 = 361.x

$x^2 - 1921x + 608400 = 0$

(x – 400)(x – 1521) = 0

x = 400 v x = 1521

Jadi, dengan melihat deretnya maka S_{2012} = x = 400.

58. (OMITS 2012)
Banyaknya cara untuk mengganti tanda Δ dengan tanda " + " atau " – "
sehingga
1 Δ 2 Δ 3 Δ 4 Δ 5 Δ 6 Δ 7 Δ 8 Δ 9 Δ 10 = 29
Jawab :

Supaya 1 Δ 2 Δ 3 Δ 4 Δ 5 Δ 6 Δ 7 Δ 8 Δ 9 Δ 10 = 29 dengan mengganti tanda Δ dengan tanda " + " atau " – "

adalah, kita gunakan cara coba-coba maka akan ketemu, sebanyak kemungkinan ada 8 cara

59. (OMITS 2012)
Bilangan tiga digit yang merupakan faktorial dari digit-digitnya adalah …

Jawab :
Perhatikan bahwa
1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
Yang agak mungkin adalah bilangan tersebut ≤ 5!
Dengan cara coba-coba, misalkan
123 ≠ 1! + 2! + 3!
123 ≠ 1 + 2 + 6 = 9
Coba yang ini
145 = 1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145
Jadi bilangan tersebut 145

60. (OMITS 2012)

Untuk pasangan bilangan bulat (*x,y,n*) yang memenuhi :

$$\frac{(x! + y!)}{n!} = 3^n$$

Maka nilai maksimum dari $x + y + n$ adalah …

Jawab :

Pada pasangan (x,y,n) berlaku

$$\frac{(x! + y!)}{n!} = 3^n$$

, maka

x! + y! = n!. 3^n

- untuk x = y = 0 dan n = 0 atau (0,0,0) memenuhi
- untuk x = 1, y = 0 dan n = 0 atau (1,0,0) tidak memenuhi
- untuk x = 0 , y = 1 dan n = 0 atau (0,1,0) tidak memenuhi
- untuk x = 2 , y = 1 dan n = 1 atau (2,1,1) memenuhi
- untuk x = 1, y = 2 dan n = 1 atau (1,2,1) juga memenuhi
- untuk yang lain silahkan cek sendiri dan tidak ada yang memenuhi

Sehingga nilai maksimum untuk $x + y + n$ = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4

61. (OMITS 2012)
Jika diketahui :
π = 3, 141592…(Bilangan pi)
$\emptyset$ = 1, 618033…(Golden ratio)
γ = 0, 577215…(Konstanta euler)
e = 2, 718282…(Bilangan natural)
Diantara bilangan berikut yang mempunyai nilai terbesar?
a. π^e *b.* e^π c. e^γ d. $\pi^\emptyset$ e. $\emptyset^\gamma$

Jawab :

Bilangan terbesar adalah antara pilihan a dan b

Untuk mencari mana dari kedua itu yang terbesar, karena kita tidak dibolehkan menggunakan alat hitung dalam bentuk apapun, menurut saya coba kita gunakan logaritma natural (ln)

Perhatikan rumus berikut

- ln x = 2, 303 log x
- log x = 0,4343 ln x

Dan juga anda harus ingat log 2 = 0, 3010 , log 3 = 0, 4771 , log 4 = 2. log 2 = 0, 6020 ,serta sifat ln sama dengan sifat pada logaritma, misalkan

$x_1 = \pi^e$ $x_2 = e^\pi$

ln x_1 = ln π^e ln x_2 = ln e^π

ln x_1 = e . ln π ln x_2 = π.ln e

ln x_2 = π = 3, 141592 (karena ln e = ^{e}log e = 1)

ln x_1 = 2,718282. ln (3,141592) = 2,718282. (2,303) log (3,141592)

dengan memperkirakan log (3,141592) berada pada interval log 3 < log (3,141592) < log 4

yaitu 0, 4771 < log (3,141592) < 0, 6020

Kalau kita ambil perkiraan log (3,141592) ≈ 0, 5

maka ln x_1 = 2,718282. (2,303) log (3,141592) = 2,718282. (2,303) . (0, 5) = 3, 130101

Dari uraian di atas diperoleh bahwa ln x_1 < ln x_2

Jadi nilai terbesar adalah e^π (**B**)

B. TEORI BILANGAN (NUMBER THEORY)

62. (OMITS 2012)

Tentukan banyaknya bilangan positif n yang tidak lebih dari 2012 dan memenuhi kondisi $(n.2^n)+1$ habis dibagi 3?

Jawab :
n = 1 $\Longrightarrow (1.2^1)+1=3$ (memenuhi)
n = 2 $\Longrightarrow (2.2^2)+1=9$ (memenuhi)
n = 3 cek sendiri
n = 4 cek sendiri
n = 5 cek sendiri
n = 6 cek sendiri
n = 7 $\Longrightarrow (7.2^7)+1=897$ memenuhi karena 8 + 9 + 7 = 24 kelipatan 3 (ingat keterbagian suatu bilangan dengan angka 3)
n = 8 $\Longrightarrow (8.2^8)+1=2049$ tidak memenuhi karena 2049 > 2012
yang memenuhi yaitu saat n = 1, 2, 7 jadi ada 3 bilangan

63. (PORSEMA NU 2012)

Angka terakhir bila P = 1! + 2! + 3! + . . . + 2012! adalah. …

Jawab :

ingat bahwa n! = 1 x 2 x 3 x 4 x . . . x (n-2) x (n-1) x n

Untuk 1! = 1

2! = 2

3! = 6

4! = 24

51 = 120

6! = 720

7! = ……0 , dst selalu berakhir dengan angka nol

Sehingga 1! + 2! + 3! + . . . + 2012! = 1 + 2 + 6 + 24 +120 + 720 + ……0 = ………3

Jadi jawaban akhirnya adalah berangka terakhir 3

64. (OMITS 2012)

Di sebuah perpustakaan terdapat beberapa orang yang suka membaca buku. Pada hari Selasa 31 Januari 2012 terdapat 5 orang ke perpustakaan meminjam buku, mereka adalah Puput, Nadia, Dina, Dika dan Aulia. jika Puput datang untuk datang ke perpustakaan tiap 2 hari sekali, Nadia 3 hari sekali, Dina tiap 5 hari sekali, Dika tiap 7 hari sekali dan Aulia setiap 11 hari sekali, maka mereka berlima akan meminjam buku secara bersama-sama lagi pada hari Selasa tanggal …

Jawab :
Gunakan KPK untuk soal di atas
Jika tidak pada tahun kabisat misal 2013, 2014, 2015, 2017, 2018 dst, maka

Januari 31 hari	Juli 31 hari
Februari 28 hari	Agustus 31 hari
Maret 31 hari	September 30 hari
April 30 hari	Oktober 31 hari
Mei 31 hari	Nopember 30 hari
Juni 30 hari	Desember 31 hari

____ +
sehingga jumlah hari dalam 1 tahun = 365 hari
Jika pada tahun kabisat maka maka jumlah hari dalam 1 tahun = 366 hari
Sehingga KPK dari 2, 3, 5, 7, 11 adalah = 2310
Perhatikan untuk tahun

2012	2013	2014	2015	2016	2017	januari 2018	Februar*1*	Maret	April	Mei
335 hari	*365*	*365*	*365*	*366*	*365*	*31*	*28*	*31*	*30*	*29*

= 2310
Jadi mereka bersama-sama lagi pada 29 Mei 2018

65. Tentukan digit terakhir dari 777^{333}

Jawab :
Digit terkakir 777^{333} = sisa pembagian 777^{333} oleh 10
$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv (770+7)^{4x83+1}\ mod\ 10$
$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv (7)^{4x83+1}\ mod\ 10$
$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv (2401)^{83}.7\ mod\ 10$

$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv 1.7\ mod\ 10$
$777^{333}\ mod\ 10\ \equiv 7\ mod\ 10$
Jadi digit terakhirnya jika 777^{333} dibagi 10 adalah 7

66. (OMITS 2012)
Tentukan digit terakhir dari

$$2012^{2011^{2010^{2009}}} + 2013^{2012^{2011^{2010}}} + 2014^{2013^{2012^{2011}}} + 2015^{2014^{2013^{2012}}}$$

Jawab :
Untuk mengetahui angka satuan, perhatikan table berikut

Angka satuan	Pangkat 1	Pangkat 2	Pangkat 3	Pangkat 4	Pangkat 5
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	6	2
3	3	9	7	1	3
4	4	6	4	6	4
5	5	5	5	5	5
9	9	1	9	1	9

Selanjutnya kita tinggal melihat digit terakhir pada setiap bilangan

Sebagai contohnya, untuk 2010^{2009} anggap saja $\ldots 0^{\ldots 9}$, nol pangkat sembilan lihat table tetap tetap berakhir dengan nol juga. Selanjutnya untuk $2011^{2010^{2009}}$, anggap saja 2011 berpangkat …0, maka hasilnya adalah sebuah bilangan yang berakhiran dengan digit 1. Sehingga $2012^{2011^{2010^{2009}}}$ sama saja $2012^{\ldots 1}$, ini akan menghasilkan sebuah bilangan dengan digit terakir adalah 2.

Maka selanjutnya dapat kita susun sebagai berikut :
$2012^{2011^{2010^{2009}}}$ akan berakhiran dengan digit 2
$2013^{2012^{2011^{2010}}}$ akan berakhiran dengan digit 9
$2014^{2013^{2012^{2011}}}$ akan berakhiran dengan digit 4
$2015^{2014^{2013^{2012}}}$ akan berakhiran dengan digit 5
Kalau kita jumlahkan semua = 2 + 9 + 4 + 5 = 20
Jadi,

$$2012^{2011^{2010^{2009}}} + 2013^{2012^{2011^{2010}}} + 2014^{2013^{2012^{2011}}} + 2015^{2014^{2013^{2012}}}$$

akan berakhiran denga digit 0.

67. Tentukan sisa pembagian 3^{2012} jika dibagi 41!

Jawab :

$3^{2012} \bmod 41 \equiv 3^{4x503} \bmod 41$

$\equiv (3^4)^{503} \bmod 41$

$\equiv (2x41 - 1)^{503} \bmod 41$

$\equiv (-1)^{503} \bmod 41$

$\equiv -1 \bmod 41$

$\equiv (41 - 1) \bmod 41$

$\equiv 40 \bmod 41$

Jadi sisa 3^{2012} dibagi oleh 41 adalah 40.

68. Tunjukkan bahwa
$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \ \ldots + \frac{1}{478} + \frac{1}{479} - \frac{2}{480}$, habis dibagi 641!

Jawab :

$\frac{p}{q} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots + \frac{1}{480}\right) - 3(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \ \ldots + \frac{1}{480})$

$\frac{p}{q} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots + \frac{1}{480}\right) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ \ldots + \frac{1}{160})$

$\frac{p}{q} = \left(\frac{1}{161} + \frac{1}{162} + \frac{1}{163} + \ \ldots + \frac{1}{480}\right)$

$\frac{p}{q} = (\frac{1}{161} + \frac{1}{480}) + \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{479}\right) + \cdots + (\frac{1}{320} + \frac{1}{321})$

$\frac{p}{q} = 641\{\left(\frac{1}{161.480}\right) + \left(\frac{1}{162.479}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{320.321}\right)\}$

$p = 641q\{\left(\frac{1}{161.480}\right) + \left(\frac{1}{162.479}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{320.321}\right)\}$

Dari bentuk p terakhir menunjukkan bahwa p habis dibagi oleh 641.

69. Perhatikan susunan bilangan berikut!

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$56^2 - 45^2 = 1111$$

$$556^2 - 445^2 = 111111$$

$$5556^2 - 4445^2 = 111111$$

. .

. .

$$\cdot \qquad \cdot$$

Buatlah generalisasinya dan buktikan!

Jawab :

Susunan bilangan tersebut di atas adalah variasi dari $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$56^2 - 45^2 = 1111$$

$$556^2 - 445^2 = 111111$$

$$5556^2 - 4445^2 = 111111$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$(55\ldots56)^2 - (44..45)^2 = \left(\underbrace{111\ldots1}_{n+1}\right)\left(\underbrace{100\ldots1}_{n}\right)$$

Silahkan cek

70. (OMITS 2012)

Banyaknya bilangan yang tidak lebih dari 2012 dan jika dibagi dengan 2, 3, 4, 5, dan 7 akan bersisa 1 adalah …

Jawab :

Misalkan bilangan itu X, maka

$a_1 : X \equiv 1\ (mod\ \ 2)$

$a_2 : X \equiv 1\ (mod\ 3)$

$a_3 : X \equiv 1\ (mod\ 4)$

$a_4 : X \equiv 1\ (mod\ 5)$

$a_5 : X \equiv 1\ (mod\ 7)$

Sehingga $X_k = 420k + 1$, dengan $k \in bilangan\ Asli$ dan kalua yang diinginkan ≤ 2012,

maka bilangan itu adalah :

X_1 = 421

X_2 = 841

X_3 = 1261

X_4 = 1681

X_5 = 2101 ——> tidak memenuhi

Jadi ada 4 bilangan

71. (OMITS 2012)

Pada suatu permainan, STIMO meminta anda untuk memikirkan sebuah bilangan tiga digit ITS, dimana I, T dan S adalah digit-digit basis 10. Kemudian STIMO meminta anda untuk memikirkan bilangan baru dengan bentuk IST, TSI, TIS, STI dan SIT kemudian menjumlahkannya. Jika kelima bilangan baru berjumlah 3194 dan STIMO dapat menebak bilangan yang anda pikirkan di awal tadi, Berapakah bilangan ITS itu?

Jawab :

Sebuah bilangan yang terdiri dari 3 digit(masing-masing berbeda) kalau digitnya dipermutasikan akan berupa 6 bilangan yang masing-masing juga berupa bilangan 3 digit pula.

Dan jumlah hasil permutasi tadi adalah 222 kali dari jumlah salah satu bilangan yang dipermutasikan

Misalkan bilangan itu I, T dan S dan hasil permutasinya ITS, IST, SIT, STI, TIS dan TSI

maka

ITS = 100I + 10 T + S

IST = 100I + 10 S + T

SIT = 100S + 10 I + T

STI = 100S + 10 T + I

TIS = 100T + 10 I + S

TSI = 100T + 10 S + I

__________________ +

ITS+IST+SIT+STI+TIS+TSI= 100.(2I + 2T + 2S) + 10.(2I + 2T + 2S) + (2I + 2T + 2S)

= 200.(I+T+S) + 20.(I+T+S) + 2.(I+T+S) = 222.(I+T+S)

Pada soal terdapat fakta

222.(I+T+S) – ITS = 3194

Karena ITS dengan I≠T≠S maka dapat dipastikan ITS adalah bilangan genap. Untuk jumlah digit ITS karena ketiganya berbeda nilai paling tinggi adalah 24(dengan memisalkan I = 7, T = 8 dan S = 9) dan paling rendah bernilai 6

Dengan cara coba-coba kita akan tertuju pada jawaban yang diinginkan.

Misal

- 222 .24 = 5328 ——>tentunya bilangan ini terlalu besar
- 222. 23 = 5106 ——>masih terlalu besar
- 222. 22 = 4884
- 222. 21 = 4662
- 222. 20 = 4440
- 222. 19 = 4218
- 222. 18 = 3996
- 222. 17 = 3774
- 222. 16 = 3552 ————————————> mungkin
- 222. 15 = 3330 ——> mulai mengecil
- 222. 14 = 3108 ——> tidak mungkin

Ambil 3552, dengan mengambil bilangan bebas yang terdiri 3 digit berbeda dimungkinkan akan ketemu jawabannya

Andai ITS = 358 (jumlahnya = 16)

222 .(3+5+8) – 358 = 3194

Jadi bilangan yang kita pikirkan tadi adalah 358

72. (OMITS 2012)

Jika I, T dan S adalah digit-digit yang memenuhi
IST + TIS + TSI +STI + SIT – 1 = 2012, tentukan bilangan ITS itu?

Jawab :
Perhatikan soal di atas
IST + TIS + TSI +STI + SIT – 1 = 2012
IST + TIS + TSI +STI + SIT = 1 + 2012 = 2013
Perhatikan juga pada pembahasan pada no soal sebelumnya, yaitu
222.(Bilangan yang diinginkan) – ITS = 2013
222.(I+T+S) – ITS = 2013

Misal
222. 10 = 2220 —-> mungkin
Ambil saja 10 = 2 + 1 + 7, sehingga
222. (2 + 1 + 7) – 217 =2013
Jadi ITS = 217

73. (OMITS 2012)

Jika sebuah alfametik BELGIS x 6 = GISBEL
Nilai dari SI + BELGIS + BELI + ES + LEGI =…

Jawab :

Dari soal kita mendapatkan 6 x (BEL x 1000 + GIS) = (GIS x 1000 + BEL)

6000BEL + 6GIS = 1000GIS + BEL

6000BEL – BEL = 1000GIS – 6GIS

5999BEL = 994GIS (masing-masing ruas dibagi dengan 7)
857BEL = 142GIS

Perhatikan bahwa dengan mengamati kesamaan tersebut didapat bahwa BEL = 142 dan GIS =857

6 x 142857 = 857142 ⟺ 6 x BELGIS = GISBEL, maka didapat bahwa:

B = 1, E = 4, L = 2, G = 8, I = 5, S = 7

Sehingga

SI + BELGIS + BELI + ES + LEGI = 75 + 142857 + 1425 + 47 +2485 = 146889

74. Jika $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x, serta $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil dari atau sama dengan x. Tentukan nilai untuk

$$\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor + \left\lceil\frac{1}{3}\right\rceil + \left\lfloor\frac{1}{4}\right\rfloor + \left\lceil\frac{1}{5}\right\rceil + \cdots + \left\lfloor\frac{1}{2012}\right\rfloor + \left\lceil\frac{1}{2013}\right\rceil$$

Jawab :

$\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor = 1$, $\left\lfloor\frac{1}{4}\right\rfloor = 1$, $\left\lceil\frac{1}{3}\right\rceil = 0$, $\left\lceil\frac{1}{5}\right\rceil = 0$ dan seterusnya, maka

$$\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor + \left\lceil\frac{1}{3}\right\rceil + \left\lfloor\frac{1}{4}\right\rfloor + \left\lceil\frac{1}{5}\right\rceil + \cdots + \left\lfloor\frac{1}{2012}\right\rfloor + \left\lceil\frac{1}{2013}\right\rceil = \underbrace{1 + 0 + 1 + 0 + \cdots + 1 + 0}_{2012} = 1006$$

75. (OMITS 2012)

Pada persamaan fungsi tangga berikut berlaku

$$\left\lfloor\sqrt{\left\lfloor\sqrt{2012}\right\rfloor}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{\sqrt{2012}}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{k}{2012}\right\rfloor$$

Jika $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x, maka nilai k yang memenuhi

Jawab :

Untuk ruas kiri $\sqrt{2012} = 44, \ldots$

Sehingga $\left\lfloor\sqrt{2012}\right\rfloor = \lfloor 44, \ldots \rfloor = 44$, dan $\sqrt{44} = 6, \ldots$ maka $\lfloor 6, \ldots \rfloor = 6$

Untuk ruas kanan $\left\lfloor\sqrt{\sqrt{2012}}\right\rfloor = 6$

Sehingga

$$\left\lfloor\sqrt{\left\lfloor\sqrt{2012}\right\rfloor}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{\sqrt{2012}}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{k}{2012}\right\rfloor$$

$$6 = 6 + \left\lfloor\frac{k}{2012}\right\rfloor$$

$$\left\lfloor\frac{k}{2012}\right\rfloor = 0$$

Maka nila k yang memenuhi adalah $0 \le k < 2012$

Jadi k ada sebanyak 2012, yaitu; 0, 1, 2, 3, …, 2011.

76. (OMITS 2012)

Banyaknya pembagi positif untuk 1005010010005001 adalah …

Jawab :

Untuk mengetahui berapa banyak pembagi positif dari 1005010010005001, maka

1005010010005001 = 1001 x 1001 x 1001 x 1001 x 1001 = 1001^5

$1001^5 = (7.11.13)^5 = 7^5.11^5.13^5$

Sehingga banyaknya pembagi positifnya adalah = (***5***+1)(***5*** + 1)(***5*** + 1)= 6. 6. 6 = 216

77. (OMITS 2012)
Untuk
(1945 x 1946 x 1947 x … x 2011 x 2012) /19^q
adalah bilangan bulat, maka harga *q* adalah…

Jawab :
kurangkan saja 2012 dengan bilangan bulat sebelum 1945
2012 – 1944 = 68
Kemudian hasilnya kita bagi dengan 19 dan hasilnya dibulatkan
68/19 ≈ 3,5789
Jadi *q* = 4

78. (OMITS 2012)
Jumlah untuk semua bilangan bulat *n* yang memenuhi n! memiliki 2012 angka nol di bagian belakang pada representasi desimalnya adalah …

Jawab :

Untuk mengetahui jumlah angka nol dibagian belakang pada representasi desimal suatu bilangan gunakan rumus [$\frac{n}{5^m}$] dengan $m \subset \{1, 2, 3, \dots\}$

Gunakan cara coba-coba

Misalkan n = 8000

- [8000/5] = 1600
- [8000/25] = 320

- [8000/125] = 64
- [8000/625] = 12,8 tidak dibulatkan, jadi = 12
- [8000/3125] = 2, 56 jadi = 2

____ +

1998

Untuk n = 8060

- [8060/5] = 1612
- [8060/25] = 322,4 jadi = 322
- [8060/125] = 64, 48 jadi = 64
- [8060/625] = 12, 896 jadi = 12
- [8060/3125] = 2, 5792 jadi = 2

____ +

2012 tepat

Karena 8060/5 = 1612 tepat tanpa sisa, maka akan ada 4 bilangan sisa lagi diatasnya(karena dibagi 5, setiap representasi nol dari n! akan diperoleh dari 5 bilangan berurutan), yaitu 8061, 8062, 8063 dan 8064

Jadi totalnya ada 8060 + 8061 + 8062 + 8063 + 8064 = 40310

C. GEOMETRI (GEOMETRY)

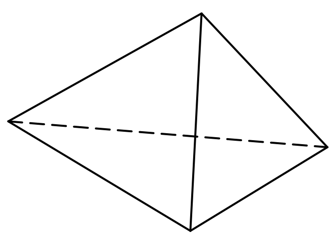
79. (OMITS 2012)
Jarak terdekat untuk titik (M, T) dengan garis Ox + Iy + S adalah …

Jawab :
Jarak terdekatnya adalah $\frac{OM+IT+S}{\sqrt{O^2+I^2}}$

80. Bila anda memiliki 6 batang korek api, bagaimana anda menyusun ke enam batang korek api itu menjadi 4 buah segitiga yang sama sisi?

Jawab :

Untuk menjawab soal yang satu ini, coba anda perhatikan gambar berikut

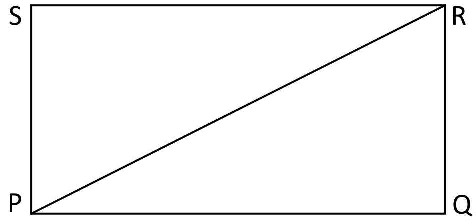


Sehingga, ke-6 batang korek api tersebut akan membentuk bangun limas dengan sisi berupa segitiga sama sisi

81. (OMITS 2012)
Jika PQRS adalah segiempat yang mempunyai luas *L* dan *PQ + QS + RS* = 16, supaya L maksimum maka nilai dari *PR* adalah… .

Jawab :

Segiempat PQRS anggap saja persegi pajang



Perhatikan gambar di atas adalah sebuah persegi panjang, sehingga memiliki sifat

- PQ // SR dan PQ = SR
- PS // QR dan PS = QR
- PR adalah diagonal dan PR = QS
- Dari soal, PQ + QS + RS = 16 $\Rightarrow$ 2PQ + QS =16 $\Rightarrow$ 2PQ + PR = 16, sehingga mengakibatkan PR = 16 – 2PQ
- Lihat $\Delta \mathrm{PQR}$, $\mathrm{QR} = \sqrt{\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2}$

Ditanyakan Luas supaya maksimum, maka PR=…?

Luas PQRS = PQ x QR

Luas PQRS = PQ x $\sqrt{\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2}$

Luas PQRS = PQ x $\sqrt{(16 - 2\mathrm{PQ})^2 - \mathrm{PQ}^2}$ = PQ x $\sqrt{4\mathrm{PQ}^2 - 64\mathrm{PQ} + 256 - \mathrm{PQ}^2}$

= PQ x $\sqrt{3\mathrm{PQ}^2 - 64\mathrm{PQ} + 256}$ = $\sqrt{3PQ^4 - 64PQ^3 + 256PQ^2}$

Sehingga luas PQRS = L = $\sqrt{3PQ^4 - 64PQ^3 + 256PQ^2} = (3PQ^4 - 64PQ^3 + 256PQ^2)^{\frac{1}{2}}$

Supaya luas PQRS maksimum, maka L' = 0, sehingga

$\frac{1}{2}.\,(3PQ^4 - 64PQ^3 + 256PQ^2)^{-\frac{1}{2}}.(12PQ^3 - 192PQ^2 + 512PQ) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(12\mathrm{PQ}^3 - 192\mathrm{PQ}^2 + 512\mathrm{PQ})}{2\left((3\mathrm{PQ}^4 - 64\mathrm{PQ}^3 + 256\mathrm{PQ}^2)^{\frac{1}{2}}\right)} = 0$

$\Leftrightarrow \left(12\mathrm{PQ}^3 - 192PQ^2 + 512PQ\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3\mathrm{PQ}^2 - 48\mathrm{PQ} + 128 = 0$ (masing-masing ruas dibagi dengan 4PQ)

Dengan menggunakan rumus ABC untuk persamaan kuadrat dalam peubah PQ di atas, maka akan kita peroleh

$PQ = 8 \pm \frac{8}{3}\sqrt{3}$ dan

PR = 16 – 2PQ

PR = 16 – 2$\left(8 \pm \frac{8}{3}\sqrt{3}\right)$

PR = 16 – 16 $\pm \frac{8}{3}\sqrt{3}$

PR = $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

Jadi panjang PR supaya luas PQRS maksimum adalah $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ satuan panjang

82. (OMITS 2012)
Jika diketahui Sebuah balok KLMN.OPQR yang didalamnya terdapat bidang empat Q.LMN. Jika LN = i, LO = t, dan NO = s, volume balok tersebut dalam I, t, dan s adalah… .

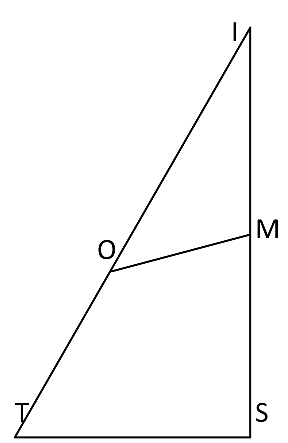
Jawab :
Silahkan anda coba sendiri

83. (OMITS 2012)

Pada segitiga ITS, diketahui TS = 5, IS = 12 dan IT = 13 dengan titik O dan M berturut-turut terletak pada IT dan IS sedemikian hingga OM membagi segitiga ITS menjadi dua bagian yang sama luas. Tentukan panjang minimum untuk OM?

Jawab :

Perhatikan gambar berikut,



Anggap ΔITS seperti tampak pada gambar di atas, dengan IT = 13, IS = 12, dan TS = 5, jelas ΔITS adalah segitiga siku-siku serta OM membagi ΔITS menjadi 2 bagian yang sama luas.

Luas ΔIOM = $\frac{1}{2}$.Luas ΔITS= $\frac{1}{2}$. alas(TS). tinggi(IS) = $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$. 5 . 12 = 15 Satuan luas

Luas ΔIOM = $\frac{1}{2}$.IO.IM.sin <OIM = $\frac{1}{2}$.IO.IM.$\frac{5}{13}$ = 15 <=> IO.IM = 6.13 = 78

Untuk mencari OM kita gunakan aturan cosinus,

$OM^2 = IO^2 + IM^2 - 2.IO.IM.cos < OIM$

$OM^2 = IO^2 + IM^2 - 2.(6.13).\left(\frac{12}{13}\right)$

Dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM akan diperoleh

$OM^2 \geq IO^2 + IM^2 - 2.(6.13).\left(\frac{12}{13}\right)$

OM^2 ≥ 2. IO.IM – 2. (6.13). $\left(\frac{12}{13}\right)$

OM^2≥2. IO.IM – 144

OM^2≥2. 78 – 144

OM^2≥ 156 – 144

OM^2≥ 12

OM ≥ $\sqrt{12}$

OM ≥ $2\sqrt{3}$

Jadi panjang minimum OM adalah $2\sqrt{3}$

84. (OMITS 2012)

Jika $x = \sqrt[n]{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}$ dan *tan* θ = $\frac{1}{6}.(x^n + x^{-n})$ dengan 0 ≤ θ ≤ 2π, maka nilai θ_1 + θ_2 adalah. ...

Jawab :

$x^n = \left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n$ = $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^1$ = $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$x^n = \left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-n}$ = $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$ = $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (untuk yang ini anda rasionalkan)

tan θ = $\frac{1}{6}.(x^n + x^{-n})$ = 1/6. [$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ + $\sqrt{3}-\sqrt{2}$] = $\frac{1}{6}\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

tan θ = $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dengan 0 ≤ θ ≤ 2π

tan θ $=$ tan 30^0

$\theta \ = 30^0 + k.180^0$

Untuk k = 0 $\Rightarrow \theta_1 \ = \ 30^0 + 0.180^0 \ = 30^0$ *(mm=memenuhi)*

Untuk k = 1 $\Rightarrow \theta_2 \ = \ 30^0 + 1.180^0 = 210^0$ *(mm)*

Untuk k = 2 $\Rightarrow \theta_3 = \ 30^0 + 2.180^0 = 390^0$ *(tidak mm)*

Sehingga $\theta_1 \ + \ \theta_2 \ = 30^0 \ + \ 210^0 \ = 240^0$

85. (OMITS 2012)

Sebuah persamaan trigonometri

$\sqrt{\frac{2(\tan 2\theta - \tan\theta)}{\tan 2\theta}} = \sqrt{i} + \sqrt{-i}$

dengan $i = \sqrt{-1}$

Jika 0 ≤ θ ≤ 2π dan θ_1 ≥ θ_2, maka harga dari cot θ_1 – csc θ_2 adalah ...

Jawab :

Untuk

$\sqrt{\frac{2(\tan 2\theta - \tan\theta)}{\tan 2\theta}} = \sqrt{i} + \sqrt{-i}$ kuadratkan masing-masing ruas, maka akan kita dapatkan

$\frac{2(\tan 2\theta - \tan\theta)}{\tan 2\theta} = i + (-i) + 2\sqrt{-i^2}$ (ingat bahwa: $\sqrt{-i^2} = \sqrt{-(-1)} = \sqrt{1} = 1$)

$\frac{2(\tan 2\theta - \tan\theta)}{\tan 2\theta} = 2$

2 (tan 2 θ – tan θ) = 2 tan 2 θ

2tan 2 θ -2 tan θ = 2 tan 2 θ

tan θ = 0, dengan menggunakan persamaan untuk rumus tangen akan didapatkan

θ = 0 + $k.\pi$ = $k.\pi$

untuk k = 0 ===> θ_1 = 0

untuk k = 1 ===> θ_2 = π

untuk k = 2 ===> θ_3 = 2 π

Dari soal Jika $\theta_1 \geq \theta_2$, ambil θ_1 = 2 π dan θ_2 = π

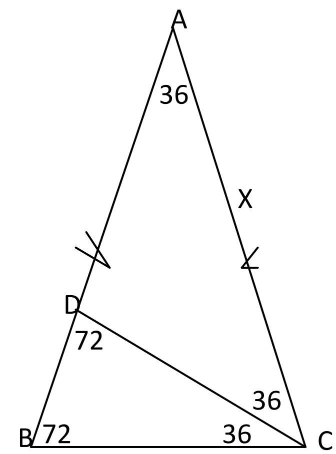
Sehingga cot 2 π – cosec π = cot 360^0 – cosec 180^0 = ∞ – ∞

Jadi sebagai kesimpulannya dengan melihat hasilnya adalah cot 2 π – cosec π = cot 360^0 – cosec 180^0 = tidak didefinisikan untuk hasil pengurangan dari 2 bilangan ini.

86. Tentukan nilai eksak dari $\sin 36^0$

Jawab :

Misalkan $\Delta\mathrm{ABC}$ sama kaki dengan $< A = 36^0$, $< B =< C = 72^0$,$\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = 1, \mathrm{AC} = \mathrm{x}$ serta CD adalah $garis\ bagi$.



Perhatikan bahwa

$\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{BCD}$, sehingga didapat $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB-AD} \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB-BC}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

Untuk $= AB = AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, hal ini berakibat

$\frac{AB}{BC} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .... (1)

Dengan aturan $sinus$ didapatkan ,

$\frac{AB}{\sin < C} = \frac{BC}{\sin\ < A} \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sin < C}{\sin < A} = \frac{\sin 72^0}{\sin 36^0} = \frac{2\sin 36^0 \cos 36^0}{\sin 36^0} = 2\cos 36^0$.

Sehingga $\frac{AB}{BC} = 2\cos 36^0$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) berakibat

$2\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Dengan menggunakan rumus identitas trigonometri akan didapatkan

$$sin^2 36^0 + cos^2 36^0 = 1 \Leftrightarrow sin^2 36^0 = 1 - cos^2 36^0 = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right) = 1 - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

Jadi , $\sin 36^0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

87. Segitiga ABC memiliki panjang sisi $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$. Jika $= \frac{a+b+c}{2}$, buktikan bahwa

$$\cos\frac{< BAC}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

Jawab :

Misalkan $< BAC = \alpha$. Berdasarkan aturan cosinus dan rumus trigonometri untuk sudut rangkap , kita mendapatkan

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$2cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$2cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 1$

$2cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{2bc}{2bc}$

$cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc}$

$cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$

$cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$

$cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(2s)(2s-2a)}{4bc}$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ (terbukti)

Silahkan pembaca buktikan (masih berkaitan dalam bahasan di atas , kecuali yang telah di buktikan) dengan

$\alpha = < BAC , \beta = < ABC , \gamma = < BCA$, dan $r =$ jari − jari lingkaran dalam ΔABC

bahwa

- $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$
- $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$, $\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$, $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}$
- $\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$, $\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$, $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$

88. (PUMaC 2006)
Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $a = 7, b = 8, c = 5$. tentukan nilai dari $(\sin A + \sin B + \sin C).(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2})$?

Jawab :

Soal di atas menuntut kita untuk tahu beberapa kesamaan identitas trigonometri di antaranya sebagai berikut :

Untuk $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, maka ;

- $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$
- $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$
- $\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma = \cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta\cot\frac{1}{2}\gamma.$

(Untuk ketiga identitas di atas silahkan buktikan sendiri)

Sehingga soal di atas dapat dituliskan kembali,

$(\sin A + \sin B + \sin C\ ).(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2})$

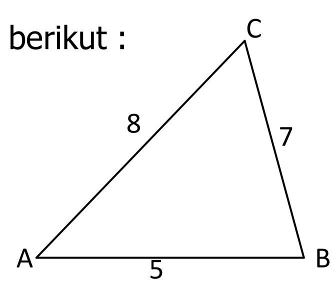
$= \left(4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C\right).\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}.\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right) = \left(\frac{4cos^2\frac{A}{2}.cos^2\frac{B}{2}.cos^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)$

Ingat bahwa $cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$, maka

$\left(\frac{4cos^2\frac{A}{2}.cos^2\frac{B}{2}.cos^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right) = \frac{4\left(\frac{1+\cos A}{2}\right)\left(\frac{1+\cos B}{2}\right)\left(\frac{1+\cos C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)\left(\frac{1+\cos C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} =$

$\frac{\frac{1}{2}(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{\frac{(\cos A+\cos B+\cos C-1)}{4}} = \frac{2(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{(\cos A+\cos B+\cos C-1)}.$

Untuk segitiganya kita ilustrasikan sebagai berikut :



Langkah selanjutnya kita cari nilai $cosinus$ untuk masing – masing sudut,

$$\cos A = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2.8.5} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

$$\cos B = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2.5.7} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\cos C = \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2.7.8} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$$

Sehingga,

$$\frac{2(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{(\cos A+\cos B+\cos C-1)} = \frac{2\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{11}{14}\right)}{\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{11}{14}\right)-1\right)} = \frac{(3)\left(\frac{8}{7}\right)\left(\frac{25}{14}\right)}{\frac{6}{14}} = \frac{100}{7}$$

89. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, buktikan bahwa untuk $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$

Jawab :

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) + \cos\{180^0 - (\alpha+\beta)\}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - 2\cos^2(\alpha+\beta) + 1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\} + 1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\{-2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}(-\beta)\} + 1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta + 1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}\left(90^0 - \frac{1}{2}\gamma\right)2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta + 1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma + 1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$

Terbukti

Silahkan pembaca buktikan , jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ maka

- $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$
- $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$ (sudah di buktikan)

- $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$
- $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$
- $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
- $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
- $\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma = \cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta\cot\frac{1}{2}\gamma$
- $\cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\gamma + \cot\beta\cot\gamma = 1$

90. (IMO 1963)
Buktikan bahwa $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$

Jawab :
Kita tulis ulang soal di atas,

$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$, langkah yang paling tepat untuk menyelesaikan

kesamaan ini adalah $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$ kita kalikan dengan $\left(\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}\right)$. Sehingga

kita dapatkan

$$= \frac{2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} - 2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) - \left(\sin\frac{4\Pi}{7} - \sin\frac{0\Pi}{7}\right) + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{4\Pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{4\Pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{7} - \frac{4\pi}{7}\right) - \sin\frac{4\Pi}{7} + \sin\left(\frac{7\pi}{7} - \frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{4\Pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$= \frac{1}{2}$ (terbukti)

91. (OMITS 2012)
Nilai eksak dari

$$\frac{1}{cos^2 10^0} + \frac{1}{sin^2 20^0} + \frac{1}{sin^2 40^0} - \frac{1}{cos^2 45^0} \text{ adalah}$$

Jawab :
Perhatikan bahwa untuk

$\frac{1}{cos^2 10^0} = \frac{2}{1+\cos 20^0}$, dan kita misalkan $\cos 20^0 = a$
$\frac{1}{sin^2 20^0} = \frac{2}{1-\cos 40^0}$, anggap $\cos 40^0 = b$
$\frac{1}{sin^2 40^0} = \frac{2}{1-\cos 80^0}$, anggap $\cos 80^0 = c$
$\frac{1}{cos^2 45^0} = 2$
Dan
$\frac{2}{1+a} + \frac{2}{1-b} + \frac{2}{1-c} - 2 = 2\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}\right) - 2$

$= 2\left(\frac{(1-b)(1-c)+(1+a)(1-c)+(1+a)(1-b)}{(1+a)(1-b)(1-c)}\right) - 2$
$= \frac{4+2(a-b-c)-2abc}{1+a-b-c-ab-ac+bc+abc}$

Perlu anda ketahui pula bahwa

1. a - b - c = cos 20 - cos 40 -cos 80 = 0 , karena cos 20 = cos 40 + cos 80
2. - ab - ac + bc =
   1/2.(cos 60 + cos 20) 1/2.(cos 100 + cos 60) + 1/2.(cos 120 + cos 40) = -3/4
3. abc = cos 20. cos 40. cos 80 = 1/8

Untuk poin 1 - 3 silahkan anda cek dan buktikan sendiri

Sehingga nilai akhirnya adalah

[4 + 2(a-b-c) -2abc]/[1 + (a-b-c) + (-ab-ac+bc) + abc] = [4 - 1/4]/[1+(-3/4)+1/8]=10
Jadi nilai eksak dari

$$\frac{1}{cos^2 10^0} + \frac{1}{sin^2 20^0} + \frac{1}{sin^2 40^0} - \frac{1}{cos^2 45^0} = 10$$

92. (OMITS 2012)

Tentukan nilai eksak dari

$$\frac{27\, sin^3\, 9^0 \;+\; 9\, sin^3\, 27^0 \;+\; 3\, sin^3\, 81^0 \;+\; sin^3\, 243^0}{\sin 9^0} \;?$$

Jawab :
Ingat bahwa
sin 81^0 = cos 9^0 dan
sin 243^0 = – cos 27^0

$4\, sin^3$ x = 3 sin x – sin 3x
$4\, cos^3$ x = 3 cos x + cos 3x
maka
$27\, sin^3\, 9^0 = \frac{27}{4}$ (3 sin 9^0 – sin 27^0) = $\frac{1}{4}$.(81 sin 9^0 – 27 sin 27^0)
$9\, sin^3\, 27^0 = \frac{1}{4}$.(27 sin 27^0 – 9 sin 81^0)
$3\, sin^3\, 81^0 = 3\, cos^3\, 9^0 = \frac{1}{4}$.(9 cos 9^0 + 3 cos 27^0)
$sin^3\, 243^0 = -\, cos^3\, 27^0 = \frac{1}{4}$.(-3 cos 27^0 – cos 81^0)
Sehingga

$$\frac{27\, sin^3\, 9^0 + 9\, sin^3\, 27^0 + 3\, sin^3\, 81^0 + sin^3\, 243^0}{\sin 9^0}$$

$$= \frac{\frac{81}{4}\sin 9^0 - \frac{27}{4}\sin 27^0 + \frac{27}{4}\sin 27^0 - \frac{9}{4}\sin 81^0 + \frac{9}{4}\cos 9^0 + \frac{3}{4}\cos 27^0 - \frac{3}{4}\cos 27^0 - \frac{1}{4}\cos 81^0}{\sin 9^0}$$

$$= \frac{\frac{81}{4}\sin 9^0 - \frac{27}{4}\sin 27^0 + \frac{27}{4}\sin 27^0 - \frac{9}{4}\cos 9^0 + \frac{9}{4}\cos 9^0 + \frac{3}{4}\cos 27^0 - \frac{3}{4}\cos 27^0 - \frac{1}{4}\sin 9^0}{\sin 9^0}$$

$$= \frac{\frac{81}{4}\sin 9^0 - \frac{1}{4}\sin 9^0}{\sin 9^0}$$

$$= \frac{\frac{80}{4}\sin 9^0}{\sin 9^0} = 20$$

Jadi, nilai eksak dari $\frac{27\, sin^3\, 9^0 + 9\, sin^3\, 27^0 + 3\, sin^3\, 81^0 + sin^3\, 243^0}{\sin 9^0} = 20$

D. KOMBINATORIKA (COMBINATORICS)

93. Ada berapa banyak cara memilih 3 orang dari 5 orang siswa untuk menjabat sebagai ketua OSIS, wakil dan bendaharanya

    Jawab :

    Persoalan ini adalah masalah permutasi 3 obyek yang dipilih dari 5 obyek pilihan.

    Jadi, $5^{P}{}_{2} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2} = 60$

    Andaim kata susunan tidak disebutkan maka gunakan aturan kombinasi

94. Tentukan banyaknya susunan dari kata"OLIMPIADE"!
    Jawab :

    Huruf O ada 1, L ada 1, I ada 2, M ada 1, P ada 1, A ada 1, D ada 1, dan E ada 1

    Total huruf ada 9

    Gunakan aturan *permutasi*

    Sehingga banyaknya susunan dari huruf tersebut adalah

    $P(9,1,1,2,1,1,1,1,1) = 9!/(1!1!2!1!1!1!1!1!) = 181440$

95. (OMITS 2012)
    Diketahui 2012 titikpada sebuah bidang dan tidak ada 3 buah titik yang segaris.
    Banyaknya garis lurus yang dapat dibuat dari titik-titik tersebut adalah ...

    Jawab :
    Gunakan rumus kombinasi untuk menyelesaikan soal ini yaitu C(2012,2) = 1/2. 2012. 2011 = 1006 . 2011
    Jadi banyaknya garis ada sebanyak 1006.2011

96. (OMITS 2012)
    Zakiyyah menggambarkan poligon 2012 sisi pada di sebuah kertas, kemudian Sulastri datang menghampirinya. Sulastri meminta Zakiyyah untuk menarik garis-garis diagonal

dari setiap sudut poligon 2012 sisi tersebut. Tentukan banyaknya diagonal yang dibua t!

Jawab :
Untuk mengerjakan soal tersebut gunakan rumus Kombinasi yaitu
C(n,2) - n = 1/2.[n.(n-3)] dengan n = banyaknya segi
Sehingga untuk Segi (n) = 2012 diperoleh
C(2012,2) - 2012 = 1/2.[2012.2009] = 1006.2009 = 2021054
Jadi banyaknya diagonal untuk segi 2012 adalah 2021054

97. Coba anda perhatikan bilangan 1, 2, 3, … , 2012. Berapa kali kita menuliskan angka nol?

Jawab :

Perhatikan kembali penulisan bilangan 1, 2, 3, …, 2012.

Untuk 1 sampai dengan 1000 muncul sebanyak 192 kali, dengan rincian sebagai berikut :

- 1 sampai dengan 100 ada 11 kali
- 101 sampai dengan 200 ada 20 kali
- 201 sampai dengan 300 ada 20 kali

dst

- 801 sampai dengan 900 ada 20 kali
- 901 sampai dengan 1000 ada 21 kali

Untuk 1001 sampai dengan 2000 ada sebanyak 119 + 181 = 300 kali

- 1001 sampai dengan 1100 ada 119 kali
- 1101 sampai dengan 1200 ada 20 kali
- 1201 sampai dengan 1210 ada 20 kali

dst

- 1801 sampai dengan 1900 ada 20 kali
- 1901 sampai dengan 2000 ada 21 kali

Untuk 2001 sampai dengan 2012 ada sebanyak 22 kali

Jadi, banyaknya angka nol pada penulisan bilangan 1, 2, 3, … , 2012 muncul sebanyak 514 kali.

98. Jabarkanlah bentuk $(3a-b)^6$

Jawab :
Silahkan pembaca jabarkan sendiri

99. Carilah koefisien dari x^5y^8 dari penjabaran $(x+y)^{13}$

Jawab :
Ingat bahwa
$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}.y^k$
$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$
Dari soal diperoleh $n=13$ $m-1=8\Longrightarrow m=9$ (suku ke 9)
Sehingga suku ke 9 = $\binom{13}{8}x^5y^8=\frac{13!}{5!.8!}x^5y^8$

100. Carilah koefisien ab^2c pada penjabaran $(a+3b-c)^4$

Jawab :
Dengan cara yang tidak jauh dari sebelumnya
$\binom{4}{3}a^{4-3}(3b-c)^3=\binom{4}{3}a^1\binom{3}{1}(3b)^{3-1}(-c)^1=-\binom{4}{3}\binom{3}{1}a(3b)^2c=-4.3.9ab^2c=$
$-108ab^2c$

101. Tentukan koefisien dari $x^3y^2z^4$ pada penjabaran $(x+y-2z)^9$

Jawab :
Penyelesaiannya diserahkan kepada pembaca

102. (AIME 1983)
Carilah sisa pembagian jika $6^{83}+8^{83}$ jika dibagi oleh 49

Jawab :
$6^{83}+8^{83}=(7-1)^{83}+(7+1)^{83}$
$(7-1)^{83}+(7+1)^{83}=\left(7^{83}-\binom{83}{1}7^{82}+\cdots-1\right)+\left(7^{83}+\binom{83}{1}7^{82}+\cdots+1\right)$
$(7-1)^{83}+(7+1)^{83}=2\left(7^{83}+\binom{83}{2}7^{81}+\cdots+\binom{83}{80}7^3+\binom{83}{82}7\right)$
$(7-1)^{83}+(7+1)^{83}=\underbrace{2\left(7^{83}+\binom{83}{2}7^{81}+\cdots+\binom{83}{80}7^3\right)}_{kelipatan\ 49}+2.\underbrace{\frac{83!}{1!.82!}.7}_{sisa}$
Jadi sisa $6^{83}+8^{83}$ oleh 49 adalah 2.83.7 dan $2.\frac{83.7}{49}=\frac{1162}{49}=23\text{ dan bersisa }35$
Jadi sisa pembagian $6^{83}+8^{83}$ oleh 49 bersisa 35

103. (AIME 1986)

Polinom $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17}$ dapat ditulis sebagai polinom dalam variabel y dengan $y = x + 1$, maka koefisien dari y^2 adalah

Jawab :
Perhatikan bahwa
$(1 - a^2) = (1 + a)(1 - a)$
$(1 - a^3) = (1 + a)(1 - a + a^2)$
$(1 - a^4) = (1 + a)(1 - a + a^2 - a^3)$
.
.
.
$(1 - a^{18}) = (1 + a)(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \cdots - a^{17})$
Jadi soal di atas dapat dituliskan sebagi

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17} = \frac{1 - x^{18}}{1 + x}$$

Karena $y = x + 1$, maka

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17} = \frac{1 - (y - 1)^{18}}{y}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17} = \frac{1 - \left(\binom{18}{0}y^{18} - \binom{18}{1}y^{17} + \binom{18}{2}y^{16} - \cdots - \binom{18}{15}y^3 + \binom{18}{16}y^2 - \binom{18}{17}y^1 + \binom{18}{18}\right)}{y}$$

Jadi koefisien y^2 adalah saat y^3 dibagi y yaitu $\binom{18}{15} = 816$

104. (AIME 2001)
Tentukan jumlah semua akar-akar dari polinom $x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001} = 0$

Jawab :
Penyelesaian diserahkan kepada pembaca

105. Jika masing-masing huruf diambil dari kata "MUDAH" dan "BANGET". Berapakah peluang satu konsonan serta satu vokal

Jawab :
Peluangnya adalah
1 konsonan dari "MUDAH" dan 1 vokal dari "BANGET" atau sebaliknya, sehingga total peluangnya
$\frac{2}{5}.\frac{4}{6} + \frac{3}{5}.\frac{2}{6} = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$

106. (OMITS 2012)
Bila $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$,
maka untuk nilai dari
$\binom{2012}{0}\binom{2012}{1} + \binom{2012}{1}\binom{2012}{2} + \binom{2012}{2}\binom{2012}{3} + \cdots + \binom{2012}{2011}\binom{2012}{2012}$ adalah...

Jawab :
Perhatikan bahwa ada rumus

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{r+1} = \binom{2n}{n+1}$$

Jadi jawaban untuk soal diatas adalah
$\binom{2012}{0}\binom{2012}{1} + \binom{2012}{1}\binom{2012}{2} + \binom{2012}{2}\binom{2012}{3} + \cdots + \binom{2012}{2011}\binom{2012}{2012} = \binom{4024}{2013}$

107. Tentukan banyaknya pasangan (x, y, z) jika $x + y + z = 6$ dengan
   a. $1 \leq x, y, z \leq 5$
   b. $x, y, \text{dan } z$ adalah bilangan bulat tak negative

Jawab :

a. $x + y + z = 6$ dengan $1 \leq x, y, z \leq 5$

Karena pertanyaan di atas tidak mensyaratkan sesuatu, pasti membolehkan adanya pengulangan, sehingga kita susun saja jawaban yang diinginkan, yaitu;
$x + y + z = 6$
1 + 1 + 4 = 6, 1 + 4 + 1 = 6, 4 + 1 + 1 = 6
1 + 2 + 3 = 6, 1 + 3 + 2 = 6, 2 + 1 + 3 = 6, 2 + 3 + 1 = 6
3 + 1 + 2 = 6, 3 + 2 + 1 = 6, dan 2 + 2 + 2 = 6
Jadi ada 10 pasangan

b. Untuk menjawab soal yang kedua ini

Alternatif 1 :

Dari jawaban a) kita tinggal menambahkan yang belum, yaitu;
0 + 1 + 5 = 6, 0 + 5 + 1 = 6, 1 + 0 + 5 = 6, 1 + 5 + 0 = 6
5 + 0 + 1 = 6, 5 + 1 + 0 = 6,
0 + 2 + 4 = 6, 0 + 4 + 2 = 6, 2 + 0 + 4 = 6, 2 + 4 + 0 = 6
4 + 0 + 2 = 6, 4 + 2 + 0 = 6
0 + 3 + 3 = 6, 3 + 0 + 3 = 6, 3 + 3 + 0 = 6
0 + 0 + 6 = 6, 0 + 6 + 0 = 6, dan 6 + 0 + 0 = 6
Jadi terdapat sebanyak 28 pasangan

Alternatif 2 :

Kita dapat menggunakan aturan kombinasi

$$\binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!\,2!} = 28$$

108. Tentukan banyaknya susunan bilangan asli (x, y) yang memenuhi $x + y = 5$

Jawab :
$x + y = 5$, dan $x, y \in$ bilangan asli, maka
Dapat kita simulasikan sebagai berikut
$1 + 4 = 5$, $2 + 3 = 5$, $3 + 2 = 5$, dan $4 + 1 = 5$
Atau dapat kita tuliskan $\binom{5-1}{2-1} = \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$
Jadi ada 4 susunan

109. Carilah banyaknya tupel bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi $a + b + c + d = 17$

Jawab :
Sama seperti di atas $\binom{17-1}{4-1} = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3!13!} = \frac{16.15.14}{1.2.3} = 560$

110. (OMITS 2012)
Berapakah banyaknya pasangan bilangan nonnegatif (O, M, I, T, S) jika
O + M + I + T + S = 12
dengan O ≤ 3, M ≤ 4, I ≤ 5, T ≤ 6, S ≤ 7?

Jawab :
Misalkan kita buatkan variable baru, sehingga dapat kita tuliskan kembali
t_1 = 3 – O
t_2 = 4 – M
t_3 = 5 – I
t_4 = 6 – T
t_5 = 7 – S
t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 – O – M – I – T – S
t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 – (O + M + I + T + S)
t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 25 – (12) = 13
Sehingga $\binom{13+5-1}{5-1} = \binom{17}{4} = \frac{17!}{(17-4)!.4!} = \frac{17!}{13!.4!} = \frac{17.16,15.14}{4.3.2.1} = 2380$
Jadi, banyaknya pasangan bilangan nonnegatif yang diinginkan adalah 2380.

111. Berapakah tripel bilangan bulat yang terjadi jika persamaan $x + y + z = 9$ dengan syarat $0 \leq x \leq 4$; $0 \leq y \leq 5$; $0 \leq z \leq 3$

Jawab :
Silahkan coba sendiri dengan cara di atas

112. (OMITS 2012)

Tentukan harga dari

C(2012,0) + $\frac{1}{2}$.C(2012,1) + $\frac{1}{3}$.C(2012,2) + . . . + $\frac{1}{2013}$.C(2012,2012)

Jawab :
Untuk solusi ini gunakan rumus

C(n,0) + $\frac{1}{2}$.C(n,1) + $\frac{1}{3}$.C(n,2) + . . . + $\frac{1}{(n+1)}$.C(n,n) = $\frac{1}{(n+1)}$.[$2^{(n+1)} - 1$]

maka

C(2012,0) + $\frac{1}{2}$.C(2012,1) + $\frac{1}{3}$.C(2012,2) + . . . + $\frac{1}{2013}$.C(2012,2012) adalah

= $\frac{1}{2013}$.[$2^{(n+1)} - 1$]

113. (OMITS 2012)

Jika beberapa tim mengikuti turnamen sepak bola. Setiap tim bertemu tepat satu kali dengan lainnya. Bagi pemenang setiap pertandingan akan memperoleh nilai 3, kalah o dan kalau seri, keduanya masing-masing memperoleh nilai 1. Jika di akhir turnamen angka 2012 tidak pernah muncul pada tiap perolehan poin total masing-masing tim, maka banyaknya tim yang mengikuti turnamen sepak bola tersebut adalah…

Jawab :
Yang pertama kita cari total pertandingan, setelah ketemu selanjutnya kita urai keperolehan nilai menang dan seri.
Untuk mencari total pertandingan gunakan rumus kombinasi, karena setiap tim bertemu satu kali maka :

$C(n,2) = \frac{1}{2}.n.(n-1)$ dengan *n* = banyaknya tim yang ikut turnamen tersebut

untuk total perolehan nilai dari soal diketahui tidak pernah muncul nilai **2012,** maka

Total nilai = [menang x 3] + [seri x 1] < 2012

Kita dapat memasukkan harga *n* bebas untuk mencari jawaban yang diinginkan.

- untuk *n* = 50 ⟹ maka $\frac{1}{2}$.50.49 =1225 total pertandingan. dari sini ada sekitar 1225 total pertandingan, katakanlah menang 200. lainnya 1025 draw maka total nilainya adalah = 3 x 200 + 1025 x 2 = 600 + 2050 = 2650, jelas tidak memenuhi, demikian pula apa bila menangnya lebih banyak dan *seri*nya lebih sedikit.

- untuk $n = 40 \Rightarrow$ maka $\frac{1}{2}$. 40 . 39 = 780 total pertandingan, misalkan menangnya 452 dan serinya 328 maka total nilainya adalah = 3 x 452 + 2 x 328 = 1356 + 656 = 2012 dan ini tidak yang kita harapkan
- untuk $n = 39 \Rightarrow$ maka $\frac{1}{2}$. 39. 38 = 741 total pertandingan, tetapi dari total pertandingan ini jika katakanlah menang 530 kali, seri 211 maka akan didapatkan nilai = 3 x 530 + 2 x 211 = 1590 + 422 = 2012 dan ini tidak mungkin karena total nilai 2012 dikatakan tidak pernah muncul
- untuk $n = 38 \Rightarrow$ maka $\frac{1}{2}$. 38 . 37 = 703 total pertandingan. Anggap menang yang terjadi 606 dan seri 97 maka total nilainya adalah = 3 x 606 + 2 x 97 = 1818 + 194 = 2012 dan ini juga tidak diinginkan
- untuk $n = 37 \Rightarrow$ maka $\frac{1}{2}$. 37. 36 = 666, mau menang ataupun seri tidak akan ketemu total nilai sampai 2012. katakanlah menang semuanya maka 666 x 3 = 1998

Sehingga total tim yang mengikuti turnamen sepak bola tersebut adalah 37 tim

DAFTAR PUSTAKA

1. Aziz, Abdul,Muhammad Son Muslimin. 2011. *Kupas Tuntas Olimpiade matematika SMA*. Yogyakarta: ANDI
2. http://mathtoday.wordpress.com/ diakses 27 Juni 2012 .
3. http://rosapaulina.wordpress.com/ diakses 01 Juli 2012.
4. Hermanto, Eddy. 2010. *Diktat pembinaan olimpiade Matematika Tahun Pelajaran 2010-2011 SMA Negeri 5*. Bengkulu.
5. Sembiring, Suwah. 2002. *Olimpiade Matematika untuk SMU*. Bandung: Yrama Widya.
6. Tampomas, Husein. 1999. *Seribu Pena Matematika SMU Kelas 2*. Jakarta: Erlangga.
7. Tung, Khoe Yao. 2008. *Memahami Teori bilangan dengan Mudah dan Menarik*. Jakarta: Grasindo.
8. Yohanes, S. Raditya Panji. 2008. *Mahir Olimpiade Matematika SMA*. Jakarta: Kendi Mas Media.
9. Kumpulan soal dari dalam dan luar negeri